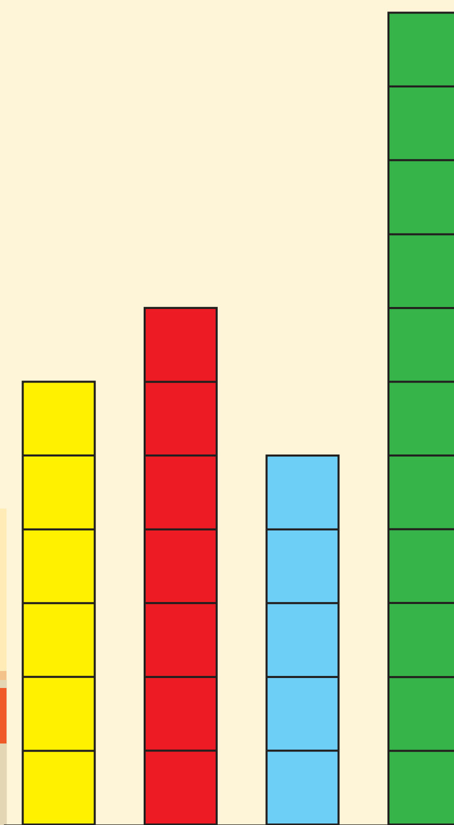
د پوهنې وزارت

رياضي

۸ ټولګی



۸ ټولګی



۱۳۹۸ هـ.ش



ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هېواد به تل ځلیږي
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه یان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحيم

د ۸ ټولګی

رياضي

۱۳۹۸

هـ.ش

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: رياضي

مؤلفين: د تعليمي نصاب د رياضي ديپارتمنت د درسي کتابونو مؤلفين

اډيټ کوونکي: د پښتو ژبې د اډيټ ديپارتمنت غړي

ټولګی: اتم

د متن ژبه: پښتو

انکشاف ورکوونکی: د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف لوی رياست

خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړيکو او عامه پوهاوي رياست

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي

د چاپ ځای: کابل

چاپخونه:

برېښناليک پته: curriculum@moe.gov.af

د پوهنې د وزیر پیغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښېونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته یې ژوند رابښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه یې برخمن کړي یو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پیغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنګه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمریز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د ګران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدینو شوراګانې د هېواد د پوهنیز نظام شپږګوني بنسټیز عناصر بلل کیږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنګه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تأسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنیو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توګه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، هیڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤولیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې ګران زده‌کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او ګټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانګه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه ګټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځیرکو او فعالو ګډونوالو په توګه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې یې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپېڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وګړي یې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي

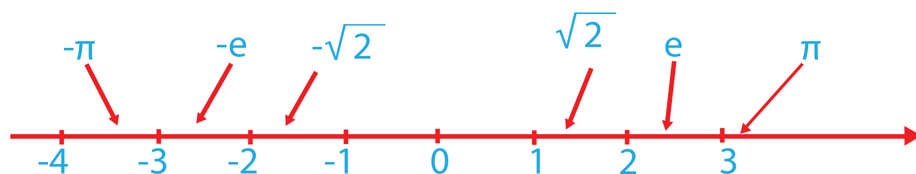
فهرست

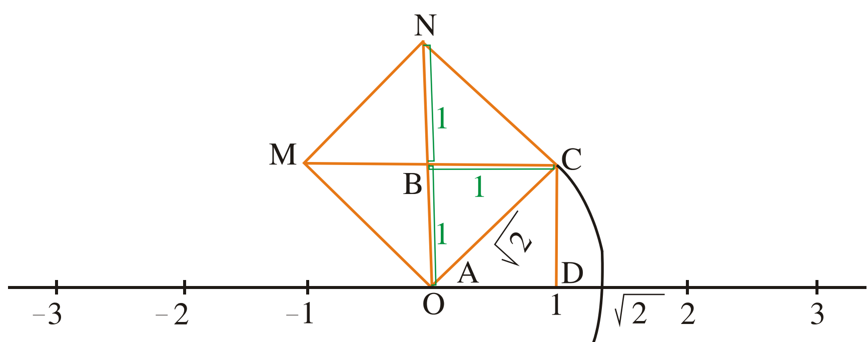
سرلیکونه | مخونه

سرليکونه	مخونه
شپږم فصل مساحت او حجمونه	**۱۳۵**
د مکعب مستطيل مساحت او حجم	۱۳۷
د منشور مساحت او حجم، د استوانې مساحت او حجم	۱٤۱
د هرم مساحت او حجم	۱٤۵
د مخروط مساحت او حجم، د کرې مساحت او حجم	۱٤۹
اووم فصل الجبري افادې	**۱۵۷**
د متحول مفهوم، الجبري افادې، د الجبري افادو ساده کول	۱۵۹
د يوه حده افادو ضرب، د يو حده افادو وېش، د الجبري افادو ضرب	۱٦۵
مطابقتونه، د دوه حده افادو د جمعې او تفاضل مربع، د الجبري افادو تجزيه	۱۷۱
اتم فصل معادلې	**۱۸۱**
د معادلې مفهوم، په معادله کې د جمعې او تفريق عمليې، په معادله کې د ضرب او وېش عمليې	۱۸۳
لومړۍ درجه يو مجهوله عمومي معادله، معادلې معادلې، د معادلو تشکيلول (جوړښت)	۱۸۹
نهم فصل رابطه او تابع	**۱۹۹**
ټکي په مستوي کې، د يوه ټکي مختصات په مستوي کې، مجهول او متحول	۲۰۱
رابطه، خطي رابطه، د خطي رابطو جوړښت، تابع	۲۰۹
لسم فصل احصائيه	**۲۱۹**
د منفصلې ډېټا د کثرت جدول، د کثرت د جدول د اجزاوو خاصيتونه	۲۲۱
ډله ييز (تجمعي) کثرت	۲۲۵
نسبي کثرت، ميله يي گراف، د منکسري کرښې گراف	۲۲۷
د منفصلې ډېټا اوسط، د جدول په مرسته د متصلې ډېټا اوسط	۲۳۳
يوولسم فصل احتمال	**۲٤۱**
نسبي کثرت او احتمال	۲٤۳
په نمونه يي فضا کې برابر او نا برابر چانس	۲٤۵
د يوې نمونه يي فضا ناڅاپي پېښه، د احتمال قاعدې	۲٤۷
ونه ييز (شجريي) دياگرام، د مسير لومړۍ قاعده (د ضرب حاصل)	۲۵۱

لومړی فصل

حقيقي عددونه



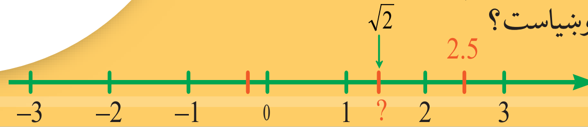


N
M
C
B
1
1
1
$\sqrt{2}$
A
D
−3
−2
−1
O
1
$\sqrt{2}$
2
3

د حقيقي عددونو مفهوم

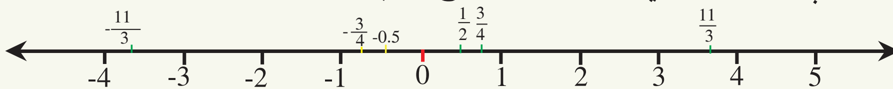


کولای شئ ټول نسبتي عددونه د عددي محور پر مخ باندې وښیاست، لکه په لاندې شکل کې چې د عددي محور پر مخ یو شمېر نسبتي عددونه ښودل شوي دي. آیا کولای شئ چې د $\sqrt{2}$ په ډول عدد هم د عددونو د محور پر مخ وښیاست؟



آیا ناطق عددونه مو پېژندلي دي؟

د اووم ټولګي او عددي محور په پام کې نیولو سره ویلای شو چې هر ناطق (نسبتي) عدد د عددونو د محور پر مخ باندې یوازې د یوې نقطې په واسطه ښودل کېدای شي، لکه لاندې شکل چې یو شمېر نسبتي عددونه د هغه پر مخ باندې ښودل شوي دي.



داسې نور عددونه هم شته چې تر اوسه پورې د محور پر مخ باندې ښودل شوي نه دي یا په بل عبارت یوازې نسبتي عددونه نشي کولای د عددونو د محور ټولې نقطې وښیي یعنې د عددي محور پر مخ باندې د نسبتي عددونو په منځ کې د داسې عددونو لپاره ډېر تش ځایونه شته چې هغه نسبتي یا ناطق عددونه، نه دي چې د همدې عددونو په واسطه د عددونو محور ډکېږي؟

فعالیت

• د لاندې عددونو دویم جذر پیدا کړئ:

عدد	25	16	2	100	4	$\frac{9}{4}$
دویم جذر				10		

• په پورته فعالیت کې د کوم عدد دویم جذر پیدا کول تاسو ته ستونزمنه ده؟

• آیا کولای شئ یو ناطق عدد پیدا کړئ چې په خپل ځان کې ضرب او د ضرب حاصل يې 2 عدد شي.
• مخامخ جدول ډک کړئ.

عدد	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
د عدد مربع	1					2.25

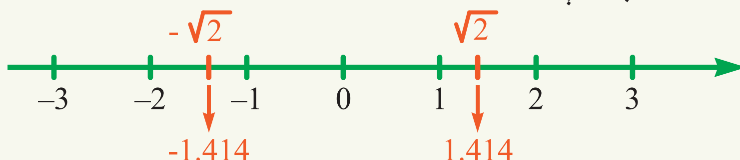
• د 2 عدد جذرالمربع د کومو دوو عددونو ترمنځ ده؟
• د 2 د عدد جذرالمربع د پیدا کولو نژدې قیمت ته د زیات پام لپاره لاندې جدول بشپړ کړئ:

عدد	1.40	1.41	1.42	1.43
د عدد مربع		1.9881		

د پورته جدول په لیدو سره وواياست چې د 2 د عدد جذرالمربع د کومو دوو عددونو تر منځ پرته ده؟ د لومړی کرښې عددونه داسې عددونه دي چې د هغو په منځ کې د 2 د عدد جذرالمربع د شتون ګومان پرې کېدای شي. هر څومره چې د جدول د لومړۍ کرښې عددونه يو بل ته نژدې وټاکل شي بيا هم په دويمه کرښه کې د 2 عدد نه ليدل کېږي او د 2 جذرالمربع نه پيدا کيږي. يعني داسې ناطق عدد چې له $\sqrt{2}$ سره مساوي وي، پيدا کولای نشو، نو د عددونو يو نوی سټ شته چې د غير ناطق (ګونګ) عددونو له سټ څخه عبارت دی د غير ناطق عددونو سټ په Q' سره ښيو، لکه: $\sqrt{7}, \sqrt{5}, \sqrt{3}, \sqrt{2}$ او داسې نور.
سره له دې چې د $\sqrt{2}$ ناطق عدد نه دی کولای شو د هندسي ښوونې په کارولو سره په لاندې توګه هغه د محور پر مخ باندې وښيو.

په شکل کې ليدل کيږي د ABCD کوچنی مربع چې د ضلعو اوږد والی يې يو واحد دی په دوو قايم الزاويه مثلثونو ويشل شوي چې د ټولې کوچنی مربع مساحت يې يو واحد مربع دی.

همدارنګه د AMNC د لوېې مربع په شکل کې وينئ چې مساحت يې نسبت ABCD کوچنۍ مربع ته زيات او 2 واحد مربع ده. له دې امله د مربع د مساحت د فارمول له مخې پوهېږو چې د لوېې مربع د هرې ضلعې اوږدوالى له $\sqrt{2}$ واحد سره مساوي دى.
که چېرې د O ټکى مرکز ونيسو او د $\sqrt{2}$ په شعاع چې د يوې مربع يوه ضلع ده، يو قوس رسم کړو، تر څو د عددونو محور قطع کړي، د عددونو له محور سره د تقاطع نقطه د $\sqrt{2}$ ځاى د عددونو د محور پر مخ باندې ټاکي.
څرنګه چې ناطق عددونه، جمعي معکوس عددونه لري غير ناطق عددونه هم جمعي معکوس عددونه لري. د بېلګې په توګه د $\sqrt{2}$ جمعي معکوس $-\sqrt{2}$ دى چې د عددونو پر محور د صفر کيڼې خوا ته ښودل شوى دى.
نو ويلى شو چې د عددونو هره نقطه له يوه حقيقي عدد سره او برعکس هر حقيقي عدد د عددونو د محور له يوې نقطې سره مطابقت کوي.

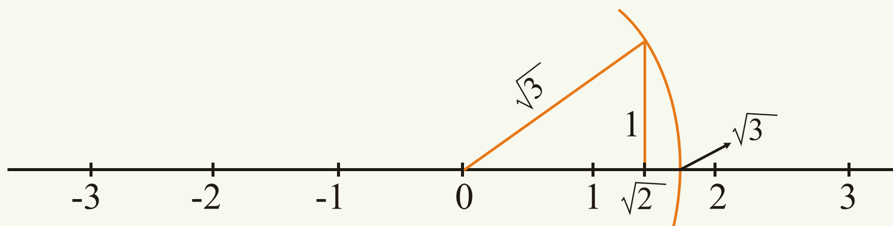


تعريف

د ناطق او غيرناطق عددونو يووالى (اتحاد) د حقيقي عددونو د سټ په نامه يادېږي او د حقيقي عددونو سټ په IR سره ښودل کېږي.

مثال: $\sqrt{3}$ د عددونو پر محور وښياست.

حل: د $\sqrt{2}$ له نقطې څخه د يوه واحد په اندازه پورته يو ټکى په نښه کوو او لاس ته راغلى ټکى له O سره نښلوو د (O) نقطه مرکز نيسو. يو قوس رسموو چې د عددونو محور قطع کړي. لاس ته راغلې نقطه د عددونو پر محور باندې د $\sqrt{3}$ ځاى ټاکي.



تمرين

1- دلاندې عددونو څخه کوم يو يې غير ناطق دئ:

a) $\sqrt{16}$, b) $-\sqrt{5}$, c) $\frac{2}{3}$, d) $\sqrt{37}$

2- درې ناطق عددونه او درې غير ناطق عددونه وليکئ.

3- د $\sqrt{15}$ په اړه څه ډول فکر کوې ناطق دی؟ او که غير ناطق؟

4- د عددونو پر محور باندې د $\sqrt{5}$ او $1+\sqrt{2}$ ځايونه وښياست.

5- د $8+2\sqrt{2}$ او $3+\sqrt{4}$ په عددي افادو کې کومه يوه ناطقه او کومه يوه يې غير ناطقه ده.

6- د $\sqrt{36}, \sqrt{31}, \sqrt{5}$ او $\sqrt{144}$ په اړه څه فکر کوئ ناطق دي او که غير ناطق؟

آيا حقيقي عددونه د بدلون (تبديلي)، يووالي (اتحادي) او توزيعي خاصيتونه لري؟

د حقيقي عددونو خواص

$$\sqrt{2}+\sqrt{5}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}\times\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{2}\times\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}\times\sqrt{5}\right)$$

$$\sqrt{2}+\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}$$



• آیا په حقیقي عددونو کې د تبدیلي، اتحادی او توزیعي خاصیتونه شتون لري؟

فعالیت

• د جدول له مخې لاندې قیمتونه پیدا کړئ.

عدد	تقریبي قیمت
$\sqrt{2}$	1.41
$\sqrt{3}$	1.73
$\sqrt{5}$	2.23

$\sqrt{3}+\sqrt{2}=?$ $\quad$ $\sqrt{2}+\sqrt{3}=?$

$2+\sqrt{2}=?$ $\quad$ $\sqrt{2}+2=?$

$\sqrt{1}+\sqrt{3}=?$ $\quad$ $\sqrt{3}+\sqrt{1}=?$

$1+\sqrt{3}=?$ $\quad$ $\sqrt{3}+1=?$

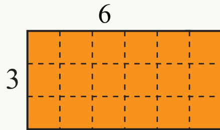
آیا د جمعې د عملې تبدیلي خاصیت د حقیقی عددونو په سټ کې صدق کوي او کنه.

له پورتني فعالیت څخه داسې پایله په لاس راځي چې د a او b هر حقیقي عدد لپاره

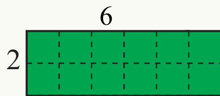
لیکلای شو: $a+b=b+a$

پوښتنه: حقیقي عددونه د ضرب په عملیه کې د بدلون خاصیت لري؟
په خو مثالونو کې یې څرګند کړئ.

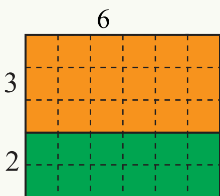
فعاليت



• د 6 واحد په اوږدوالی او 3 واحد په سور يو مستطيل رسم کړئ، د دې مستطيل مساحت څومره دی؟



• يو بل مستطيل رسم کړئ چې اوږدوالی يې 6 او سوريې 2 واحده وي، ددې مستطيل مساحت څومره دی؟



• دا دوه مستطيلونه يو د بل څنګ ته کېږدئ. له دواړو مستطيلونو څخه د جوړ شوي لوی مستطيل په لاس راغلی مساحت څومره دی؟

• د لوی مستطيل مساحت د دوو کوچنيو مستطيلونو له مساحت سره څه اړيکه لري؟

$$6(3+2)=(6\cdot3)+(6\cdot2)$$

له پورته فعاليت څخه داسې پايله په لاس راځي، د b،a او c اختياري حقيقي عددونو لپاره لرو:

$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$$

دا خاصيت په جمعي باندې د ضرب د توزيعي خاصيت په نامه يادېږي.

مثال: د $\sqrt{3}\times(\sqrt{2}+\sqrt{5})$ افادې بڼې خوا د حقيقي عددونو د خاصيت له مخې وليکئ:

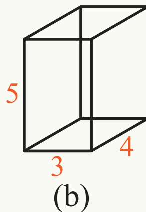
حل:

$$\sqrt{3}\times(\sqrt{2}+\sqrt{5})=(\sqrt{3}\times\sqrt{2})+(\sqrt{3}\times\sqrt{5})$$

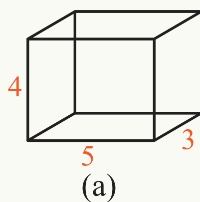
فعالیت

مخامخ شکلونه په پام کې ونیسئ.

- د (a) په شکل کې د مکعب مستطیل حجم خومره دی؟
- د (b) په شکل کې مکعب مستطیل حجم خومره دی؟



(b)



(a)

له پورته فعالیت څخه داسې پایله لاس ته راځي:

د a, b او c حقیقي عددونو لپاره لرو: $(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$

دا په ضرب کې د یووالي (اتحادي) خاصیت دی.

مثال: د حقیقي عددونو له خاصیت څخه په کار اخیستنې سره د $\sqrt{2}\times(\sqrt{3}\times\sqrt{5})$ افادې بڼې خوا ولیکئ:

حل: $\sqrt{2}\times(\sqrt{3}\times\sqrt{5}) = (\sqrt{2}\times\sqrt{3})\times\sqrt{5}$

آیا د حقیقي عددونو په جمع کې د یووالي خاصیت شته؟ په څو مثالونو کې یې څرګند کړئ.

یادونه

1- تاسو په یاد لرئ چې:

$$a+0=0+a=a$$
$$a\times 1=1\times a=a$$

پورته رابطه یا اړیکه د a د هر حقیقي عدد لپاره صدق کوي.

2- له دې وروسته د ضرب عملیې د (×) نښې په ځای د (·) نښه لیکو.

تمرین

لاندې هر یو مساوات په پام کې ونیسئ، اړوند خاصیتونه یې مخې ته ولیکئ.

a – $\sqrt{5}(2+3)=2\sqrt{5}+3\sqrt{5}$ له کوم خاصیت شخه پیروي کوي؟.......

b – $\sqrt{5}+\sqrt{3}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ له کوم خاصیت شخه پیروي کوي؟.......

c – $\sqrt{3}\times(\sqrt{2}\times\sqrt{3})=(\sqrt{3}\times\sqrt{2})\times\sqrt{3}$ له کوم خاصیت شخه پیروي کوي؟.......

d – $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ له کوم خاصیت شخه پیروي کوي؟.......

e – $\sqrt{3}+(\sqrt{5}+\sqrt{2})=(\sqrt{3}+\sqrt{5})+\sqrt{2}$ له کوم خاصیت شخه پیروي کوي؟.......

د تقریبي دویم جذر د پیداکولو عمومي طریقه

$\sqrt{125} = ?$

$\sqrt[3]{8} = ?$

تاسو د عددونو د مربع جذر پیداکول د تجزیې په طریقه باندې پوهېږئ.

آیا کولای شو د ټولو عددونو مربع جذر د تجزیې په طریقه پیداکړو؟

آیا د یوه عدد دریم جذر د تجزیې له طریقې پرته په کومه بله طریقه پیداکولای شئ؟

- د عددونو مربع جذر (دویم جذر) پیداکول مو د تجزیې په طریقه په یاد ده، مثلاً د $\sqrt{25}$ دویم جذر څو دئ.

- د عددونو دریم جذر په کومې طریقې پیداکولای شئ، مثلاً: $\sqrt[3]{27}$ څو دی؟

- د تجزیې له طریقې پرته د دویم جذر د پیداکولو لپاره کومه بله طریقه شته؟

-تاسو په اووم ټولګي کې د عددونو د دویم جذر د نیولو عمومي شکل، د هر مثبت عدد لپاره ولوستل د بیا یادونې لپاره لاندې مثالونه په پام کې نیسو:

لومړی مثال: د 625 عدد دویم جذر پیدا کوو.

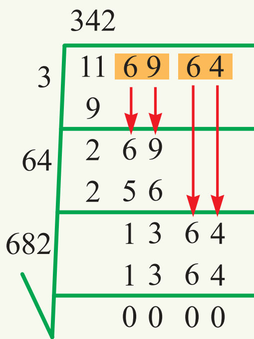
حل: د 625 عدد د جذر تر نیښې لاندې لیکو:

```
      25
   ┌──────
 2 │ 6  25
   │ 4
   ├──────
45 │ 2 2 5
   │ 2 2 5
   ├──────
 √ │ 0 0 0
```

په پایله کې: $\sqrt{625} = 25$

دویم مثال: د 116964 عدد دویم جذر پیدا کوو:

حل:



په پایله کې: $\sqrt{116964} = 342$

پوښتنه:

1- د دویم جذر د نیولو مرحلې تشریح کړئ.

2- د لاندې عددونو دویم جذر پیدا کړئ.

a) 1024 b) 5329 c) 1127

د c په جزکې مو ولیدل چې د 1127 عدد مکمل دویم جذر نه لري.

آیا د عددونو تقریبي دویم جذر په عمومي شکل سره حسابولای شئ.

د یوه عدد د تقریبي دویم جذر د پیداکولو لپاره د عمومي طریقې څخه هم کار اخلو د دې لپاره چې وکولای شو تقریبي دویم جذر په لاس راوړو لاندې فعالیت سر ته رسوو:

فعالیت

عدد	1.2	2.03	0.3	1.23	1.360
د عدد مربع	1.44	4.1209			

• د پورتني جدول له مخې د عدد د اعشاري رقمونو د شمېر او د هغه د مربع د اعشاری رقمونو د شمېر په منځ کې څه ډول اړیکه یا رابطه موجوده ده؟

• څرنګه کولای شو چې د يو مربع شوي عدد د اعشاري رقمونو د شمېر په درلودلو سره د نوموري عدد د اعشاري رقمونو شمېر پيدا کړو؟

څرنګه چې په پورته فعاليت کې د يو عدد د دويم جذر د اعشاري رقمونو شمېر د همغه عدد د اعشاري رقمونو د شمېر د مربع نيمايي دی، له دې قاعدې څخه د تقريبي دويم جذر د نيولو لپاره کار اخلو.

لومړی مثال: غواړو چې د اعشاري تر يو رقم پورې د 1438 عدد دويم جذر حساب کړو

37.9

3	14 38 . 0 0
	9
67	5 38
	4 69
749	69 00
	67 41
	1 59 پاتې

په پايله کې: $\sqrt{1438} \approx 37.9$

پوښتنه: آيا $1438 = 1438.00$ سره دي ولې، د 1438 عدد د دويم جذر د نيولو په وخت کې د 1438.00 په ډول ليکو.

دويم مثال: د اعشاري تر دويم رقم پورې د 2417 تقريبي دويم جذر پيدا کړئ.

49.16

4	24 17 . 00 00
	16
89	8 17
	8 01
981	16 00
	9 81
9826	6 19 00
	5 89 56
	0 29 44 پاتې

په پايله کې: $\sqrt{2417} \approx 49.16$

په پورته مثالونو کې وينو چې د پاتې اعشاري رقمونو شمېر د اصلي عدد، د اعشاري رقمونو له شمېر سره مساوي دي چې غواړو د هغو دويم جذر پيدا کړو.

تمرين

1- تر يوه رقم اعشاري پورې د لاندې عددونو دويم جذر پيدا کړئ:

a) 814 b) 74 c) 274

2- تر دوه رقمي اعشاري پورې د لاندې عددونو دويم جذر حساب کړئ:

a) 94752 b) 5039 c) 418

د اوسط په طریقه د دویم جذر تقریبي قیمت

$\sqrt{81}=9$

$\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$

- ویلای شئ چې د $\sqrt{81}$ څو دی؟

- ویلای شئ چې د $\sqrt{\frac{25}{16}}$ څو دی؟

تاسو پوهېږئ هر عدد چې په خپل ځان کې ضرب شي د ضرب لاس ته راغلی حاصل د لومړي عدد د مربع په نامه یادېږي، خو د ټولو مثبتو عددونو دویم جذر د کسري یا نسبتي عدد په ډول ښودلای نشو، لکه: $\sqrt{30},\sqrt{10},\sqrt{5}$

له دې امله د ځینو عددونو د دویم جذر قیمت په تقریبي ډول ښودل کېږي.

دلته غواړو د $\sqrt{5}$ تقریبي قیمت پیدا کړو.

پوښتنه: د 5 عدد، د کومو دوو عددونو د مربع په منځ کې دی؟

$\sqrt{5}$ د کومو دوو عددونو په منځ کې دی؟

د دې په پام کې نیولو سره چې د 5 دویم جذر د 2 او 3 په منځ کې دی کولای شو ووایو د 5 دویم جذر تقریباً د 2 او 3 په منځ کې له یو قیمت سره مساوي دی، یعني: $\frac{2+3}{2}=2.5$

د $\sqrt{5}$ د ښه دقیق قیمت پیدا کولو لپاره لاندې جدول په پام کې نیسو:

د عدد	مربع
2	4
2.5 عدد	6.25
3	9

د $\sqrt{5}$ عدد د 2 او 2.5 په منځ کې قرار لري

د دې په پام کې نیولو سره چې د 5 عدد د 4 او 6,25 په منځ کې قرار لري کولای شو ووایو د $\sqrt{5}$ تقریبي قیمت د 2 او 2,5 په منځ کې له یو قیمت څخه عبارت دی، یعني: $\frac{2+2.5}{2}=\frac{4.5}{2}=2.25$

د عدد	مربع
2	4
اعدد	
2.5	6.25

د پورتني جدول له مخې ویلای شئ چې د $\sqrt{5}$ د کومو دوو عددونو په منځ کې پروت دی؟ د

دې دوو لارو په کارولو سره لیدل کېږي چې د $\sqrt{5}$ تقریبي قیمت له 2.25 څخه عبارت دی

نو کولای شو ولیکو چې: $\sqrt{5} \approx 2.25$

که چېرې پورتنی لارې بیابیا وکاروو، د $\sqrt{5}$ اصلي قیمت ته لا ډېر زیات نژدې کېږو.



په پایله کې کولای شو د عددونو تقریبي دویم جذر د پورتنی طریقې په کارولو سره پیدا کړو.

مثال: د $\sqrt{10}$ تقریبي دویم جذر پیدا کړئ.

حل: د پورتنی طریقې په کارولو سره کېدای شي د $\sqrt{10}$ لومړنې تقریبی قیمت د 4 او 3 عددونو په منځ کې وي

$$\frac{3+4}{2} = 3.5 \quad , \quad 3 < \sqrt{10} < 4 \quad , \quad 9 < 10 < 16$$

د پورته عملي لنډیز په لاندې جدول کې کتلای شو.

عد د	مربع
3 عدد	9
3.5	12.25
4	16

$\sqrt{10}$ د 3 او 3.5 په منځ کې

له پورته جدول څخه داسې پایله لاس ته راځي چې: $\sqrt{10} \approx 3.5$

د دې په پام کې نیولو سره چې د 10 عدد د 9 او 12,25 په منځ کې دی، کولای شو ووایو

چې د $\sqrt{10}$ تقریبي قیمت د 3 او 3,5 عددونو منځنې قیمت دی.

$$\frac{3+3.5}{2} = \frac{6.5}{2} = 3.25$$

د $\sqrt{10}$ د لا دقیق قیمت پیداکولو لپاره لاندې جدول په پام کې نیسو:

عدد	مربع
3	9
3.25	10.5625
3.5	12.25

د $\sqrt{10}$ د 3 او 3.25 په منځ کې

په پایله کې: $\sqrt{10} \approx 3.25$

تمرین

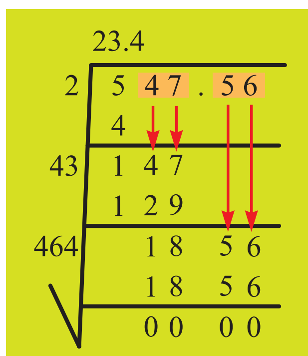
1- د لاندې هرې یوې غیر تساوي سم والی وښیاست.

a) $3 < \sqrt{12} < 4$ b) $7.1 < \sqrt{15} < 7.2$

2- د اوسط طریقې په کارولو سره د لاندې عددونو تقریبي دویم جذر حساب کړئ.

a) 21 b) 12 c) 7

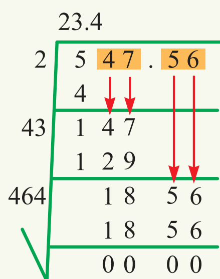
د اعشاریه لرونکو عددونو دویم جذر



که چېرې یو عدد مربع کړو، د مربع کولو په صورت کې یې د اعشاري رقمونو شمېر جفت دی.
د اعشاریه لرونکو عددونو د دویم جذر د پیداکولو لپاره چې د اعشاري رقمونو شمېر یې تاق وي، څه باید وکړو؟

مثال: د 547.56 عدد دویم جذر محاسبه کړئ.

حل: د 547.56 عدد د دویم جذر د پیداکولو لپاره د نوموړي عدد صحیح برخه یې له ښي لورې څخه کیڼې لورې ته او اعشاري برخه یې برعکس له کیڼ لورې څخه ښي لورې ته دوه، دوه عددونه یا خانې رابېلوو او بیا د عمومي جذر نیولو د طریقې په کارولو سره د عدد دویم جذر په لاس راوړو.



په پایله کې: $\sqrt{547.56} = 23.4$

پوښتنه: ولې د 547.56 عدد په دویم جذر کې د اعشاري یوازې یو رقم لرو؟

- د 381.291 عدد څو اعشاري رقمونه لري؟
- د دې عدد د دویم جذر پیدا کولو لپاره په لومړني ګام کې څه باید وکړو؟
- د هغه دویم جذر پیدا کړئ:
- د دویم جذر له نیولو مخکې فکر وکړئ چې د دې عدد دویم جذر څو اعشاري رقمه لري؟
- د نیول شوي جذر پاتې باید څو اعشاري رقمونه ولري؟

په تیرو کې موږ د څلورګونو عملیو د پوښتنو د سم حل لپاره، ځواب ازمایلی دی. له دې امله د اعشاري جذر لرونکو عددونو دویم جذر لپاره هم دا عملیه سرته رسوو.

فعالیت

لاندې د تقسیم عملیې په پام کې ونیسئ. $5 \times 2 + 3 = 10 + 3 = 13$ ✓

a:

13	5
10	2
3	

b:

13	5
5	1
8	

$5 \times 1 + 8 = 5 + 8 = 13$ ✗

د a او b د عمليو په پام کې نيولو سره د تقسيم د عمليې د سموالي شرايط تشريح کړئ.

پوښتنه: څرنګه کولای شو ځان ډاډمن کړو چې د دويم جذر د نيولو عمليه سمه ده؟

مثال: د 149 عدد دويم جذر پيدا او سم والی يې و ازماوئ.

حل:

```
     12
 1 | 1 49
   | 1
22 | 0 4 9
   |   4 4
   |   0 5
```

ازموينه: $(12 \times 12) + 5 = 144 + 5 = 149$

پوښتنه: ولې 12 په 12 کې ضربوو.

آيا د دويم جذر د سموالي لپاره يوازې د دې عمليې سرته رسول بس دي؟

که چېرې زده کوونکي تېروتنه وکړي او د 149 د دويم جذر (12) پرځای 11 په 11 کې ضرب او پاتې يعنې 28 له هغو سره جمع کړي له اصلي عدد سره مساوي کېږي، يعني: $(11 \times 11) + 28 = 149$

آيا کولای شو چې 11 د سم ځواب په توګه ومنو؟

له پورته مثال څخه داسې پايله په لاس راځي چې د دويم جذر عمليې د سموالي لپاره يو بل شرط هم لازم دی، يعني: د 149 عدد د دويم جذر دوه برابره (2×12)، جمع 1 له پاتې يعني 5 څخه لوی دی. يا $2 \times 12 + 1 > 5$

پوښتنه: د پورته فعاليت په پام کې نيولو سره وښياست چې ولې د 11 ځواب سم نه دی؟

د دويم جذر د آزمايلو لپاره بايد لاندې شرطونه په پام کې ونيول شي:

1- د دويم جذر عدد په خپل ځان کې ضرب، د ضرب حاصل جمع پاتې بايد مساوي له اصلي عدد سره وي.

2- د يو عدد د دويم جذر دوه برابره، جمع يو(1) له پاتې څخه بايد زيات وي.

تمرين

د لاندې عددونو دويم جذر پيدا او وازمويئ.

1) $\sqrt{780.81} = ?$ 2) $\sqrt{6721} = ?$ 3) $\sqrt{973} = ?$ 4) $\sqrt{692.916} = ?$

د جذري عددونو جمع او تفریق

$$2\sqrt{3}+4\sqrt{2}-\sqrt{3}=?$$

$$x\sqrt[n]{a}\pm y\sqrt[n]{a}=?$$

تاسو پوهېږئ چې د نسبتي عددونو په سیټ کې کولای شو د هر a لپاره ولیکو:

$$3a+2a=(3+2)a=5a$$

$$3a-2a=(3-2)a=a$$

آیا کولای شئ، چې جذر لرونکي عددونه یو له بل سره جمع او تفریق کړئ؟

لاندې مساواتونه په پام کې ونیسئ.

$$2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=(2+4)\sqrt{3}=6\sqrt{3}$$

$$2\times\sqrt{13}+3\times\sqrt{13}=(2+3)\times\sqrt{13}=5\times\sqrt{13}$$

د آسانتیا لپاره $5\times\sqrt{13}$ په ځای $5\sqrt{13}$ لیکو.

د جمعې د حاصل د پیداکولو لپاره د حقیقي عددونو له خاصیت څخه کار اخلو.

پوښتنه: د حقیقي عددونو د تفریق لپاره د جمعې له طریقې څخه کار اخیستلای شو؟

فعالیت

په دویم مساواتو کې د 5 پر ځای(2-7) ولیکئ، پورته طریقې ته ورته محاسبه سرته ورسوئ.

د جذري عددونو جمع او تفریق په داسې حال کې کېدای شي چې تر جذر لاندې عدد او د جذر درجه یو ډول وي. د ورته(مشابه) حدونو ضریبونه یو له بل سره جمع او یا یې یو له بله تفریقوو.

په عمومي توګه:

$$x\sqrt[n]{a}\pm y\sqrt[n]{a}=(x\pm y)\sqrt[n]{a}$$

پوښتنه: ویلای شئ چې ورته یا مشابه جذرونه کوم دي؟آیا $\sqrt{10}$ او $\sqrt{5}$ سره مشابه دي؟

لومړی مثال: $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=?$

حل: څرنګه چې تر جذر لاندې عددونه او د جذرونو درجې یو له بل سره مساوي دي.

له دې امله:

$$2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=(2+5)\sqrt{3}=7\sqrt{3}$$

دویم مثال:

$$18\sqrt{12}-16\sqrt{12}=?$$

حل:

$$18\sqrt{12}-16\sqrt{12}=(18-16)\sqrt{12}=2\sqrt{12}$$

دریم مثال:

$$8\sqrt{48}-10\sqrt{48}-3\sqrt{48}=?$$

حل: لومړی د دوه حدونو نتیجه پیداکوو او بیا له دریم حد سره عملیه سرته رسوو.

$$=(8-10)\sqrt{48}-3\sqrt{48}$$
$$=-2\sqrt{48}-3\sqrt{48}$$
$$=(-2-3)\sqrt{48}=-5\sqrt{48}$$

فعالیت

- د $\sqrt{16}+\sqrt{9}$ او $\sqrt{9+16}$ قیمتونه په لاس راوړئ، دا قیمتونه یو له بل سره پرتله کړئ.
- د $\sqrt{100-36}$ او $\sqrt{100}-\sqrt{36}$ قیمتونه په لاس راوړئ، دا دوه قیمتونه یوله بل سره پرتله کړئ؟

له پورته فعالیت څخه نتیجه اخیستل کیږي چې:

$$\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$$
$$\sqrt{a-b}\neq\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

تمرین

1-کوم جذري عددونه یو له بل سره جمع او یا یو له بله تفریقولای شو؟

a) $4\sqrt[3]{2}+3\sqrt{2}$ b) $5\sqrt{4}+3\sqrt{4}$

c) $5\sqrt[3]{6}-2\sqrt[3]{6}$ d) $7\sqrt[3]{6}+2\sqrt[3]{6}$

2-په لاندې پوښتنوکې د جمعې او تفریق حاصل په لاس راوړئ.

a) $4\sqrt[3]{2}+3\sqrt{2}$ b) $5\sqrt{4}+3\sqrt{4}$

c) $\sqrt{5}\times\sqrt{36}+\sqrt{5}\times\sqrt{36}$ d) $\sqrt{27}+3\sqrt{3}$

د جذري عددونو ضرب او تقسیم

آیا کولای شو چې جذر لرونکي عددونه ضرب او تقسیم کړو؟

$$\sqrt{\frac{36\times9}{16}}=\frac{\sqrt{36}\times\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{6\times3}{4}=\frac{9}{2}$$

فعالیت

لاندې ځوابونه په لاس راوړئ.

$\sqrt{36\times9}=\sqrt{\qquad}=$.............

$\sqrt{36}\times\sqrt{9}=$........×.............. =

$\sqrt{4\times25}=\sqrt{100}=$...........

$\sqrt{4}\times\sqrt{25}=$.......×........... =

$\sqrt{25\times36}=\sqrt{\qquad}=$................

$\sqrt{25}\times\sqrt{36}=$..........×............ =

$\sqrt{4\times9}=\sqrt{\qquad}=$...............

$\sqrt{4}\times\sqrt{9}=$..........×.......... =

د پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

د صفر څخه لوی د هره a او b حقیقي عددونو لپاره لرو: $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$

لومړی مثال:

حل:

$\sqrt{2}\times\sqrt{32}=\sqrt{2\times32}=\sqrt{64}=8$

$\sqrt{20}\times\sqrt{5}=\sqrt{20\times5}=\sqrt{100}=10$

$\sqrt{0.5}\times\sqrt{0.5}=\sqrt{0.5\times0.5}=\sqrt{0.25}=0.5$

په جذرونو باندې د عملیو په سرته رسولو سره، کوښښ کوو، چې یوه ساده افاده په لاس راوړو، دې ډول عملیې ته د جذرونو ساده کول وایي.

دویم مثال:

$$\sqrt{75}=?$$

حل:

$$\sqrt{75}=\sqrt{25\times 3}=\sqrt{25}\times\sqrt{3}=5\times\sqrt{3}=5\sqrt{3}$$

دریم مثال: دا افاده ساده کړئ:

$$\sqrt{64a^2}=?$$

حل:

$$\sqrt{64a^2}=\sqrt{64}\times\sqrt{a^2}$$

$$=\sqrt{8^2}\times\sqrt{a^2}=8a$$

څلورم مثال: غواړو لاندې جذري افادې یو له بله سره ضرب کړو.

حل:

$$(2\sqrt{6})(5-\sqrt{3})=?$$

$$=(2\sqrt{6}\times 5)-(2\sqrt{6}\times\sqrt{3})$$

$$=10\sqrt{6}-2\sqrt{18}=10\sqrt{6}-2\sqrt{9\times 2}$$

$$=10\sqrt{6}-2\sqrt{9}\times\sqrt{2}=10\sqrt{6}-6\sqrt{2}$$

آیا کولای شئ د جذري عددونو د ضرب قاعدې ته ورته، د وېش لپاره هم قاعده پیدا کړئ.

لاندې مثال په پام کې ونیسئ:

$$\sqrt{\frac{16}{100}}=\sqrt{16\times 0.01}=\sqrt{16}\times\sqrt{0.01}=4\times 0.1=0.4=\frac{4}{10}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{100}}$$

که چیرې د 16عدد پرځای a او د 100 عدد پرځای b ولیکو، نو لرو چې:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\text{، } b\neq 0$$

پنځم مثال:

حل:

$$\sqrt{\frac{36}{49}}=?$$

$$\sqrt{\frac{36}{49}}=\sqrt{\frac{9\times 4}{49}}=\frac{\sqrt{9}\times\sqrt{4}}{\sqrt{49}}=\frac{3\times 2}{7}=\frac{6}{7}$$

تمرین

1-لاندې افادې ساده کړئ:.

$a)\sqrt{144a^2}$ $\quad b)\sqrt{169a^2}$ $\quad c)\sqrt{0.09}$ $\quad d)\sqrt{6}\times\sqrt{27}$

2-لاندې افادې ساده کړئ:.

a) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}=?$ $\quad$ b) $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}}=?$ $\quad$ c) $\sqrt{\frac{81a^4}{c^2}}=?$

د توان لرونکو عددونو قوانين
د توان لرونکو عددونو ضرب:



په لابراتوار کې د جسم د لوی ښودلو لپاره له مایکروسکوپ څخه کار اخلي. هر مایکروسکوپ دوه عدسیې لري چې یوه یې سترګې ته نژدې او بله یې شي یا جسم ته نژدې وي. هغه عدسیه چې جسم ته نژدې ده د جسم اندازه د 2^2 برابره او هغه عدسیه چې سترګې ته نژدې ده تصویر یا څېره د 2^3 برابره غټوي. ویلای شئ، چې د جسم تصویر څو برابره لویږي؟

په تیر ټولګي کې مو د توان اړوند قوانین د طبیعي عددونو لپاره ولوستل په دې برخه کې غواړو چې د حقیقي عددونو لپاره نوموړي قوانین ولولو.

فعالیت

تش ځایونه په مناسبو عددونو سره ډک کړئ:

$$5^6 = 5^2 \times 5^4 = 5^3 \times .... = 5^4 \times .... = ... \times 5^1$$

$$.... = (\frac{2}{5})^2 \times (\frac{2}{5})^8 = (\frac{2}{5})^3 \times .... = (\frac{2}{5})^9 \times ....$$

$$a^5 = a^4 \times .... = ... \times a^2 = ... \times a^3$$

له پورته فعالیت څخه داسې پایله لاسته راوړو چې که چېرې m او n تام عددونه او a یو حقیقي عدد وي نو لیکلای شو چې: $a^m \times a^n = a^{m+n}$

که چیرې د توان لرونکو عددونو د ضرب په حالت کې قاعدې سره مساوي او توانونه مختلف وي په دې صورت د مساوي قاعدو څخه یوه قاعده ټاکو او توانونه سره جمع کوو.

مثال: $2^3 \times 2^4 = ?$

حل: $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

پوښتنه:

د یو عددي مثال په واسطه څرګنده کړئ چې $(-a)^n = -a^n$ تل سم نه دی.

فعالیت

$$(14^9)^4 = (14^9)\times(14^9)\times(14^9)\times(14^9) = (14)^{9+9+9+9} = 14^{9\times 4}$$

لاندې تساوي په پام کې ونیسئ:

لاندې تش ځایونه په مناسبو عددونو سره ډک کړئ.

$$(2^3)^4 = 2^3 \times .... \times .... \times .... = 2^{3+....+....+....} = 2^{3\times ....}$$

$$(a^n)^4 = a^n \times .... \times .... \times .... = a^{n+....+....+....} = a^{......\times 4}$$

له پورته فعالیت څخه داسې پایله لاس ته راځي چې: که چېرې m او n دوه تام عددونه او a یو حقیقي عدد وي نو لرو: $(a^n)^m = a^{m\cdot n}$

مثال: $(2^{-2})^3 = (2^{-2})(2^{-2})(2^{-2}) = (2)^{-2-2-2} = 2^{-2\times 3} = (2)^{-6}$

لاندې تساوي ګانو ته پاملرنه وکړئ.

$$3^2 \times 4^2 = (3\times 3)(4\times 4) = (3\times 4)(3\times 4) = (3\times 4)^2 = (12)^2$$

$$6^3 \times 5^3 = (6\times 6\times 6)(5\times 5\times 5) = (6\times 5)(6\times 5)(6\times 5) = (6\times 5)^3 = (30)^3$$

په عمومي توګه که چېرې a او b دوه حقیقي عددونه او n یو تام عدد وي نو پورته تساوي په لاندې ډول لیکلای شو. $a^n \times b^n = (a\times b)^n$

که چیرې د توان لرونکو عددونو په ضرب کې قاعدې مختلفې او توانونه مساوي وي، نو قاعدې سره ضرب کوو او د مساوي توانونو څخه یو توان لیکو.

مثال:

$4^3 \times 5^3 = ?$

حل:

$4^3 \times 5^3 = (4\times 5)^3 = 20^3$

تمرین

د توان لرونکو عددونو د ضرب قانون څخه په ګټې لاندې هره یوه افاده د یو توان په ډول ولیکئ:

1) $6^2 \times 6^3 = ?$ 2) $(0.2)^2 \times (0.2)^2 = ?$ 3) $(\frac{1}{2})^4 \times (\frac{1}{2})^3 = ?$ 4) $(\frac{1}{4})^{-7} \times (\frac{1}{4})^{-5} = ?$

5) $5^4 \times 5 = ?$ 6) $27 \times 5^3 = ?$ 7) $(4^{-2})^7 = ?$ 8) $a^5 \times b^5 \times c^5 = ?$

9) $2^3 \times 5^3 = ?$ 10) $81 \times a^2 = ?$ 11) $2^{-1} \times 3^{-1} = ?$ 12) $(10^2)^3 = ?$

د توان لرونکو عددونو تقسیم



آیا تر اوسه پورې مو خپل عکس د $\frac{1}{2}$ په اندازه کوچنی کړی دی؟ د دې کار لپاره د ریاضي له کومې عملیې څخه کار اخلو؟

د توان لرونکو عددونو د ضرب لپاره مو وکولای شول چې د توان او قاعدې په منځ کې اړیکه پیدا کړو. آیا کولی شئ ضرب ته ورته د دوو توان لرونکو عددونو د وېش اړیکه پیدا کړئ.

فعالیت

تش ځایونه ډک کړئ.

$$3^5 \div 3^4 = \frac{3^5}{3^4} = \frac{3^{\square} \times 3^4}{3^4} = 3^1 = 3^{5-\square}$$

د مقسوم، مقسوم علیه او د وېش د حاصل د توانونو تر منځ څه ډول اړیکه موجوده ده؟
آیا د ټولو توان لرونکو عددونو د وېش لپاره چې قاعدې یې مساوي وي دا اړیکه تطبیق کېدای شي؟

په عمومي توګه که چېرې a یو حقیقي عدد، n او m تام عددونه وي په دې صورت کې لرو چې:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

د دوو توان لرونکو عددونو په وېش کې چې قاعدې یې سره مساوي وي له مساوی قاعدو څخه یوه قاعده ټاکو بیا د مقسوم له توان څخه د مقسوم علیه توان تفریق او د تفریق حاصل یې د ټاکلې قاعدې د توان په توګه لیکو.

مثال: لاندې د وېش عملیې سرته ورسوئ.

$a)\ 5^3 \div 5^3 \qquad b)\ 5^{-7} \div 5^{-1}$

حل:

$a)\ \frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0$

$b)\ 5^{-7} \div 5^{-1} = 5^{-7-(-1)} = 5^{-7+1} = 5^{-6}$

فعالیت

تش ځایونه په مناسبو عددونو سره ډک کړئ.

$$12^3 \div 4^3 = \frac{12^3}{4^3} = \frac{\square \times 12}{4\times \square \times 4} = (\frac{\square}{4})\times(\frac{12}{\square})\times(\frac{12}{4}) = (\frac{12}{4})^3 = 3^3$$

له پورته فعالیت څخه داسې پایله لاسته راځي: په عمومي توګه د هر a او b اختیاري عددونو لپاره په داسې حال کې چې $b \neq 0$ او n یو تام عدد وي لیکلای شو چې:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

د توان لرونکو عددونو په وېش کې که چېرې قاعدې مختلفې او توانونه مساوي وي د مقسوم قاعده د مقسوم علیه په قاعدې باندې وېشو او له مساوي توانونو څخه یو یې د وېش د حاصل د توان په توګه لیکو.

مثال: $a)\ 25^4 \div 5^4 = ?$ $\quad b)\ 3^2 \div 10^2 = ?$

حل: د توان لرونکو عددونو د وېش له قاعدې څخه لیکلای شو:

a) $25^4 \div 5^4 = (25 \div 5)^4 = ?$

b) $3^2 \div 10^2 = (3 \div 10)^2 = (0.3)^3$

که چېرې په وېش کې د مقسوم او مقسوم علیه قاعدې او توانونه یو له بله سره توپیر ولري د وېش د حاصل د پیدا کولو لپاره باید هر توان لرونکي عدد په خپل توان ساده کړل شي او وروسته د تقسیم عملیه سرته ورسول شي.

یادونه: پورتني قوانین په داسې حال کې چې m او n حقیقي عددونه وي هم سم دي.

تمرین

1- د وېش د قانون په کارولو سره لاندې پوښتنې حل کړئ.

1) $(\frac{1}{2})^4 \div (\frac{1}{2})^3 = ?$ $\quad$ 2) $13^7 \div 13^8 = ?$ $\quad$ 3) $\frac{12^6}{12^5} = ?$

4) $\frac{7^5}{7^3} = ?$ $\quad$ 5) $\frac{8^5}{8^3} = ?$ $\quad$ 6) $6^3 \div 2^3 = ?$

2- په مثال کې وښیاست چې:

$a^m - a^n \neq a^{m-n}$

$(a-b)^n \neq a^n - b^n$

د صفر او منفي توان

$2^3 = ?$

$2^0 = ?$

$2^{-1} = ?$

2^3 حساب کړئ .

آیا کولی شو 2^0 حساب کړو؟

آیا عددونه د صفر په توان لیکلای شو؟

آیا عددونه د منفي عدد په توان سره هم لیکلای شو؟

فعالیت

لاندې جدول بشپړ کړئ.

توان لرونکی عدد	$2^4 \div 2$	$2^3 \div 2$	$2^2 \div 2$	$2^1 \div 2$
حاصل یې	8			

• د جدول په لومړۍ لیکه کې د توانونو تر منځ څه اړیکه شتون لري؟

• د جدول د دویمې لیکې د عددونو تر منځ څه ډول اړیکه پیدا کولای شئ.

• د جدول لومړۍ لیکې ته ادامه ورکړئ د وروستی توان لرونکی عدد (2^0)لپاره په دویمې لیکې کې د عددونو تر منځ د اړیکې له مخې کوم عدد لیکلای شئ؟

• پورته جدول د 3 عدد لپاره بشپړ کړئ.

• لاندې جدول د $a \neq 0$ عدد لپاره بشپړ کړئ.

توان لرونکی عدد	$a^4 \div a$	$a^3 \div a$	$a^2 \div a$	$a^1 \div a$
حاصل یې	a^3			

• د جدول لومړۍ لیکې ته ادامه ورکړئ، د وروستي توان لرونکی عدد (a^0) لپاره په دویمې لیکې کې د عددونو تر منځ د اړیکې له مخې څه ډول عدد لیکلی شئ؟

له پورتني فعالیت څخه داسې پایله لاسته راځي چې پرته له صفر $(a \neq 0)$ د بل هر عدد لپاره $a^0 = 1$ دی.

فعالیت

لاندې جدول په پام کې ونیسئ:

توان لرونکی عدد	3^3	3^2	3^1	3^0	3^{-1}
حاصل یې	27	9	3	1	

- د جدول د لومړۍ او دویمې لیکې عددونو تر منځ څه ډول اړیکه پیدا کولای شئ؟
- د جدول لومړۍ لیکې ته ادامه ورکړئ وروستی توان لرونکی عدد یعنې 3^{-2} ولیکئ.

اوس د دویمې لیکې عددونو تر منځ د اړیکې له مخې د 3^{-1} او 3^{-2} لپاره کوم عددونه پیدا کولای شئ.

- د $a \neq 0$ عدد لپاره پورتنی جدول د a توانونو لپاره ولیکئ. د a^{-1} او a^{-2} لپاره د کومو عددونو ګومان کولای شئ.

له پورتني جدول څخه داسې پایله لاسته راځي چې د هر a حقیقي عدد($a \neq 0$) او n تام عدد لپاره لیکلای شو:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

مثال : د $(1.3)^{-3}$ او $(-15)^{-21}$ افادې د مثبت توان په ډول ولیکئ.

حل: $(-15)^{-21} = \frac{1}{(-15)^{21}}$, $(1.3)^{-3} = \frac{1}{(1.3)^3}$

تمرین

1- لاندې افادې د مثبت توان په ډول ولیکئ.

a) 5^{-2} b) $(\sqrt{7})^{-5}$ c) $(\frac{1}{3})^{-3}$ d) $(2\pi)^{-3}$

2- لاندې افادې د منفي توان په ډول ولیکئ.

a) 0.0001 b) $\frac{1}{b^2}$ c) $\frac{1}{6^4}$ d) $\frac{1}{3^{11}}$

کسري توانونه او قوانين يې

$\frac{a^3}{a^2}=a^{3-2}=a=a$

$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

تاسو مخکې تام توانونه ولوستل، آیا کولای شی همغه قوانین په کسري توانونو باندې هم تطبیق کړئ.

فعالیت

- آیا د $\sqrt{16}$ او $\sqrt{-16}$ یو له بل سره مساوي دي؟
- $\sqrt[3]{-8}$ او $\sqrt[3]{8}$ له څو سره مساوي کېږي؟
- آیا $\sqrt{a}$ د توان په شکل لیکلی شو؟ $\sqrt[n]{a}$ د توان په شکل ولیکئ.

کولای شو پورته فعالیت داسې بیان کړو:

د حقیقي عددونو په سیټ کې منفي عددونه دویم جذر نه لري، خو هر عدد که مثبت یا منفي وي جذر مکعب یا دریم جذر لري.

په عمومي توګه یو جذر لرونکی عدد داسې لیکل کېږي:

$\sqrt[n]{a}$ ، داسې لوستل کېږي (د a،n ام جذر).

د یوه عدد n ام جذر له هغه عدد څخه عبارت دی چې که چېرې هم هغه عدد (تر جذر لاندې عدد) د n په توان لوړ شي تر جذر لاندې عدد په لاس راشي.

$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

تر جذر لاندې عدد توان

د جذر درجه

په یاد ولرئ: که چېرې د یوه عدد توان او د جذر درجه یو له بل سره مساوي، وي داسې پایله لاسته راځي:

$$\sqrt[n]{a^n}=a^{\frac{n}{n}}=a^1=a$$

فعالیت

لاندې تش ځايونه ډک کړئ

$$a^{\frac{1}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}=(1+\quad)a^{\frac{1}{3}}=3\sqrt[3]{a}\qquad ,3a^{\frac{1}{5}}-a^{\frac{1}{5}}=(\quad-1)a^{\frac{1}{\square}}=2\cdot\sqrt{a}$$

کولای شو له پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

I-که چېرې قاعدې او کسري توانونه سره مساوي وي د هر يوې $a\in IR$ لپاره داسې چې $a\neq 0$ وي ليکلی شو:

$$ma^{\frac{1}{n}}\pm ba^{\frac{1}{n}}=(m\pm b)a^{\frac{1}{n}}=(m\pm b)\sqrt[n]{a}$$

مثال:

$$2(15)^{\frac{1}{3}}+3(15)^{\frac{1}{3}}-15^{\frac{1}{3}}=(2+3-1)(15)^{\frac{1}{3}}=4\sqrt[3]{15}$$

II- که چېرې د وېش په عمليه کې قاعدې مساوي او کسري توانونه مختلف وي، د هر يوې $a\in IR$ لپاره داسې چې $a\neq 0$ وي لرو:

$$\frac{a^{\frac{1}{m}}}{a^{\frac{1}{n}}}=a^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}=a^{\frac{n-m}{m\cdot n}}=\sqrt[m\cdot n]{a^{n-m}}$$

مثال:

$$\frac{5^{\frac{3}{4}}}{5^{\frac{2}{3}}}=5^{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}=5^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{5}$$

III-که چېرې د ضرب په عمليه کې قاعدې مختلفې او کسري توانونه مساوي وي، په داسې حال کې چې b،a او c حقيقي عددونه او د صفر خلاف وي، نو ليکلای شو.

$$a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}\cdot c^{\frac{1}{n}}=(a\cdot b\cdot c)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{abc}$$

مثال:

$$(7)^{\frac{-5}{8}}\cdot(6)^{\frac{-5}{8}}\cdot(4)^{\frac{-5}{8}}=(7\cdot 6\cdot 4)^{\frac{-5}{8}}=\sqrt[8]{(7\cdot 6\cdot 4)^{-5}}=\frac{1}{\sqrt[8]{(7\cdot 6\cdot 4)^{5}}}$$

IV:

$$(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{m\cdot n}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$$

مثال:

$$(a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}=?$$

حل:

$$(a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}=(a)^{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}=(a)^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{a}$$

د کسرونو ناطق یا ګویا کول

$$\sqrt{2} \approx ?$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx ?$$

څنګه کولای شو چې د ($\frac{1}{\sqrt{2}}$) کسر مخرج له جذري شکل څخه وباسو.

په عمومي توګه په هغو کسرونو باندې چې مخرج یې جذر و نه لري کارکول آسان دي. که چیرې د کسر په مخرج کې جذري عدد وي، نو دا ډول کسري عددونه باید له جذر څخه وباسو، داسې چې د کسر په مخرج کې جذري عدد نه وي، خو دا کار په څه ډول باید سرته ورسوو؟

فعالیت

تش ځایونه په مناسبو عددونو سره ډک کړئ:

$$\sqrt{3} \times \square = \sqrt{6}$$

$$\sqrt{2} \times \square = 2$$

$$\frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15 \times \square}{\sqrt{5} \times \square} = \frac{15\,\square}{5} = 3\sqrt{5}$$

د پورتني فعالیت له مخې د یو کسر د مخرج دویم جذر د له منځه وړلو لپاره کولای شو د کسر صورت او مخرج د هغه په مخرج کې ضرب کړو.

مثال: آیا کولی شو چې د $\frac{1}{\sqrt{2}}$ په عدد کې د مخرج دویم جذر له منځه یوسو؟

حل: ددې لپاره صورت او مخرج په $\sqrt{2}$ کې ضرب کوو:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

فعالیت

تش ځایونه ډک کړئ:

$$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^{\square}}=\square$$

$$\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{\square^{3}}=\square$$

$$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{\square^{\square}}=2$$

$$\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{\square}=\sqrt[3]{\square^{3}}=\square$$

$$\frac{6}{\sqrt[3]{4}}=\frac{6\times\square}{\sqrt[3]{2^2}\times\sqrt[3]{2}}=\frac{6\sqrt[3]{\square}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{\square\sqrt[3]{2}}{2}=3\sqrt[3]{2}$$

له پورته فعالیت څخه داسې پایله لاس ته راځي چې د مخرج د دریم جذر د له منځه وړلو لپاره باید صورت او مخرج د داسې عدد په دریم جذر کې ضرب کړو، تر څو تر جذر لاندې عدد د 3 توان ته لوړ شي.

مثال: لاندې کسرونه گویا (ناطق) کړئ:

a) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$ b) $\frac{5}{\sqrt[3]{5}}$

حل:

$$a)\ \frac{2}{\sqrt[3]{4}}=\frac{2}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{2\times\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2}\times\sqrt[3]{2}}=\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{2\sqrt[3]{2}}{2}=\sqrt[3]{2}$$

$$b)\ \frac{5}{\sqrt[3]{5}}=\frac{5\times\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{5^2}}=\frac{5\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{5\sqrt[3]{5^2}}{5}=\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{25}$$

تمرین

1- لاندې کسرونه گویا (ناطق) کړئ:

1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

4) $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$ 5) $\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}$ 6) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$

د لومړي فصل مهم ټکي

• حقيقي عددونه

1- د ناطق او غير ناطق عددونو د سټ يووالى د حقيقي عددونو د سيټ په نامه يادېږي.

2- د عددونو د محور هر ټکی يو حقيقي عدد او برعکس هر حقيقي عدد د عددونو د محور له يوه ټکی سره مطابقت کوي.

• د حقيقي عددونو خواص

1- د جمع او ضرب د عمليو د بدلون خاصيت

2- دجمع او ضرب د عمليو د يووالي خاصيت

3- د جمعي پر عمليې باندې د ضرب توزيعي خاصيت

• د عددونو تقريبي دويم جذر

1 - په عمومي طريقې سره د تامو او اعشاري عددونو د دويم جذر پيدا کول.

2 - د اوسط په طريقه د دويم جذر تقريبی قيمت

• د جذرونو ضرب او وېش

1- د جذرونو ضرب $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

2- د جذرونو وېش $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

• په جذري عددونو کې يوازې ورته جذرونه يعني چې د جذرونو درجې او تر جذر لاندې عددونه يو شی وي، يو له بله سره جمع او يا تفريق کولای شو.

توان لرونکې عددونه او قوانين يې:

1- $a^0=1$, $a\neq 0$, aحقيقي عدد دی.

2- $a^{-1}=\frac{1}{a}$, $a\neq 0$, aحقيقي عدد دی.

3- $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, $a\neq 0$, aحقيقي عدد دی.

4- د توان لرونکو عددونو ضرب $(a^m)^n=a^{m\times n}$، $a^m\times a^n=a^{m+n}$ ، $a^n\times b^n=(a\times b)^n$

5- توان لرونکو عددونو وېش $\frac{a^n}{b^n}=(\frac{a}{b})^n$ $b\neq 0,$ $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ $a\neq 0,$

• د کسرونو ناطق يا گويا کول: د کسرونو د گويا کولو لپاره د کسر مخرج له جذر باسو.

د لومړي فصل پوښتنې

I. لاندې مساواتونه او عبارتونه په پوره پاملرنې سره ولولئ، تش ځایونه یې په مناسبو عددونو او کلمو ډک کړئ.

-1 $(\frac{1}{2})^2 \times (\frac{1}{2})^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$

-2 $a^{-8} \div a^{-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

-3 $5^9 \times \ldots\ldots\ldots = (5 \times 7)^9$

-4 د π عدد یو .... عدد دی.

II. لاندې پوښتنې په ځیر ولولئ که چېرې سمې وي د(ص) توری او که چېرې ناسمې وي د(غ) توری یې مخې ته ولیکئ.

-1 ( ) د نسبتي عددونو او ناطقو عددونو یووالی د حقیقي عددونو د سټ په نامه یادوي.

-2 ( ) په حقیقي عددونو کې د ضرب توزیعي خاصیت د جمعې په عملیې باندې سم دی.

-3 ( ) $\sqrt{3}$ غیر ناطق عدد دی.

-4 ( ) $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

III. د لاندې پوښتنو لپاره څلور ځوابونه درکړل شوي دي، سم ځواب یې پیدا او کرښه ترې تاو کړئ.

-1 $\frac{4^7}{4^5} = ?$

$a)\ 4^0$ $b)\ 4^2$ $c)\ 4^{-1}$ $d)\ 4^1$

-2 $(6y^3z^2)^2 = ?$

a) $36y^6z^4$ b) $36y^3z^4$ c) $36y^6z^2$ d) هیڅ یو

-3 $\sqrt{81 \times 9} = ?$

$a)\ 27$ $b)\ \frac{1}{27}$ $c)\ 24$ $d)\ 25$

$\sqrt{\dfrac{49a^4}{144b^4}} = ?$ -4

$a)\ \dfrac{8a^2}{12b^2}$ $b)\ \dfrac{7a^2}{12}$ $c)\ \dfrac{7a}{12b^2}$ $d)\ \dfrac{7a^2}{12b^2}$

۵- کوم دوه جذر لرونکي عددونه سره ورته دي؟

$a)\ 2\sqrt{3}\ ,\ 3\sqrt{2}$ $b)\ 5\sqrt{2}\ ,\ 3\sqrt{2}$

$c)\ 5\sqrt{3}\ ,\ 2\sqrt{5}$ $d)\ 6\sqrt{3}\ ,\ \sqrt[3]{3}$

IV. لاندې پوښتنې حل کړئ:

-1 $6\sqrt{125a^2} + \sqrt{5a^2} = ?$

2- د $\sqrt{0.5}$ تقريبي قيمت حساب کړئ.

3- لاندې افادې ساده کړئ:

$a)\ (-25a^2b^2)^6 = ?$ $b)\ (-4a \times 2a)^2 = ?$ $c)\ (-2^{-4}x)^3$

4- د 2475 دويم جذر پيدا او بيا يې وازموئ.

5- لاندې افادې ساده کړئ.

$(625a^2b^2)^6\ ,\ (-10^3)^5\ ,\ (-4q^2p^3)^4$

6- لاندې افادې د مثبت توان په ډول وليکئ.

$(27)^{-7}\ ,\ (9x^2)^{-4}\ ,\ (6ab)^{-6}$

7- لاندې افادې د منفي توان په ډول وليکئ.

$\dfrac{1}{(36)^2}\ ,\ \dfrac{26}{(16)^6}\ ,\ \dfrac{-ab}{(cd)^4}$

8- لاندې افادې ساده کړئ:

$$(\frac{1}{2})^{-1}\times(\frac{1}{6})^{-1} \quad , \quad (\frac{1}{3})^{-4}\times(\frac{1}{5})^{-4} \quad , \quad \sqrt{144}\times\sqrt{169}$$

$$(-6)^{3}\cdot(-6)^{-5} \quad , \quad (13a^{2})^{6} \quad , \quad \left\{(\frac{1}{4}xy)^{2}\right\}^{6}$$

9-لاندې افادې یو په بل کې ضرب کړئ:

$a)\ (3\sqrt{8}+2)(\sqrt{2}-3\sqrt{7})$

$b)\ (\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

10- په دوو عددي مثالونو کې وښیاست چې: $a^{m}+a^{n}\neq a^{m+n}$

11- په دوو عددي مثالونو کې وښیاست چې: $(a+b)^{2}\neq a^{2}+b^{2}$

12- په دوو عددي مثالونو کې وښیاست چې: $a^{m}-a^{n}\neq a^{m-n}$

13- په دوو عددي مثالونو کې وښیاست چې: $(a-b)^{2}\neq a^{2}-b^{2}$

14- لاندې افادې ساده او د جذر په ډول یې ولیکئ.

a) $5(25)^{\frac{1}{7}}+7(25)^{\frac{1}{7}}+4(25)^{\frac{1}{7}}=?$ b) $36(15)^{\frac{6}{7}}-17(15)^{\frac{6}{7}}=?$

c) $\frac{(7)^{\frac{3}{5}}}{(7)^{\frac{3}{5}}}=?$ d) $\frac{(17)^{\frac{2}{9}}}{(17)^{\frac{2}{3}}}=?$ e) $(17^{\frac{3}{8}})^{\frac{1}{2}}=?$ f) $(19^{\frac{5}{7}})^{\frac{2}{3}}$

دويم فصل

مالي محاسبي





نسبت
Ratio



د اوبو په هر ماليکول کې د هايدروجن او اکسيجن کيمياوي فرمول وليکئ؟ د هايدروجن او اکسيجن د اتمونو نسبت څو دی؟

فعاليت

يو ماليکول اوبه له دوو برخو هايدروجن او يوې برخې اکسيجن څخه ترکيب شوي دي. په لاندې جدول کې د هايدورجن او اکسيجن نسبت وليکئ.

د اوبو ماليکولونه	1	2	3	4	5
د هايدروجن او، اوکسيجن نسبت	$\frac{2}{1}=2$				$\frac{10}{5}=2$

آيا د اوبو د بېلابېلو ماليکولونو لپاره د هايدروجن نسبت پر اکسيجن باندې ثابت دی؟

مثال: که چېرې د يوې کوټې سور 3 متره او اوږدوالی 5 متره وي د سور او اوږدوالي نسبت يې څو دی؟

حل:

$$\frac{3 \text{ متره}}{5 \text{ متره}} = \frac{3}{5} \quad \text{يا} \quad 3 \div 5$$

فعاليت

- د 6cm په اوږدوالي او 3cm په سور يو مستطيل رسم کړئ. محيط او مساحت يې پيدا کړئ.
- د 4cm په اوږدوالي او 2cm په سور داسې يو بل مستطيل رسم کړئ چې د لومړي مستطيل د اوږدوالي نسبت د دويم مستطيل په اوږدوالي باندې او د لومړي مستطيل سور د دويم مستطيل پر سور باندې پيدا کړئ.

- د دویم مستطیل محیط او مساحت پیدا کړئ.
- د لومړي مستطیل د محیط نسبت د دویم مستطیل پر محیط باندې څو دی؟
- د لومړي مستطیل د مساحت نسبت د دویم مستطیل پر مساحت باندې څو دئ؟
- د دې نسبتونو تر منځ څه ډول اړیکه پیدا کولای شئ.

تعریف

د دوو همجنسو (یوشان) کمیتونو یا مقدارونو تر منځ نسبت له هغه عدد څخه عبارت دی چې وښیي لومړی کمیت د دویم کمیت څو برابره دی یا لومړی کمیت د دویم کمیت څومره برخه ده او یا دویم کمیت څوځلې په لومړي کمیت کې شامل دی.

د دوو عددونو نسبت عموماً د کسري کرښې (—) یا (:) او (÷) نښو په واسطه ښيي.

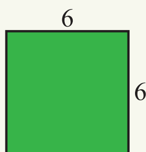
مثال: کولای شو د 5 پر 3 نسبت د 5÷3، $\frac{5}{3}$ یا 5:3 په ډول وښیو.

تمرین

1- د یوې دایرې 4 پر 7 برخې نسبت د یوې دایرې د 16 پر 28 برخې له نسبت سره پرتله کړئ.

2- که چېرې د یوه ټولګي د لومړي ګروپ د زده کوونکو شمېر 25 تنه او د دویم ګروپ شمېر 40 تنه وي، د دویم ګروپ د زده کوونکو شمېر پر لومړي ګروپ باندې پیدا کړئ.

3- یوه مربع داسې رسم کړئ چې د یوې ضلعې نسبت یې د لاندې رسم شوې مربعې د یوې ضلعې سره $\frac{1}{2}$ وي.



د دویمې مربع د محیط نسبت د لومړۍ مربع په محیط باندې او د دویمې مربع د مساحت نسبت د لومړۍ مربع په مساحت باندې پیدا کړئ.

په متناسبو اجزاوو باندې ویشل
Proportional division



دوه ورونه په ګډه یوه ودانۍ جوړوي. که چېرې یو یې له بل څخه زیات کار کړی وي، آیا فکر کوئ چې دواړو ته باید په یوه اندازه اجوره ورکړل شي؟
څرنګه پیداکولای شو چې هر یوه ته باید څومره پیسې ورکړل شي؟

فعالیت

یوه ورځ د یوه ټولګي زده کوونکو پرېکړه وکړه چې میله وکړي. یوه زده کوونکي وویل زه درې دانې هګۍ او څلور دانې منې راوړم. ټولو وویل موږ هم همدا شیان راوړو. یعنې پرېکړه یې وکړه چې له هرو درېو هګیو سره څلور دانې منې راوړي.

- لاندې جدول بشپړ کړئ.

هګۍ	3	6	9
منې	4		
د هګیو او منو مجموعه	7		

- د هګیو د شمېر نسبت د هګیو او منو د مجموعې پر شمېر باندې په پورته هر یوه حالت کې پیدا کړئ.
- د نسبتونو په منځ کې یې څه ډول اړیکه موجوده، ده؟

له پورته فعالیت څخه پایله په لاس راځي چې: دوه مقداره هغه وخت سره متناسب دي. چې د هر مقدار نسبت په مجموعه د هم هغو دوو مقدارو باندې تل یو ثابت عدد وي. له دې پایلې څخه کولای شو د پوښتنو په حل کې کار واخلو.

فعالیت

د يوې مستطيل ډوله ځمکې د اوږدوالي او سور نسبت 4 پر 3 دی. که چېرېددې ځمکې محیط 280 متره وي مساحت يې څو متره مربع دی؟
ددې پوښتنې ځواب لپاره مخامخ جدول بشپړ کړئ:

	نسبتي مقدار	واقعي مقدار
اوږدوالی	4	
سور	3	
محیط		280
مساحت		

ددې لپاره چې يو عدد په راکړ شوو نسبتونو باندې وويشو، لومړی د راکړل شوو نسبتونو د جمعې حاصل په لاس راوړو، وروسته له هغه مفروض عدد د جمعې په حاصل باندې ويشو او د وېش حاصل يې د نسبتونو په هر يوه عدد کې ضربوو. کوم عددونه چې لاس ته راځي، د راکړ شوو نسبتونو اړوند عددونه دي.

مثال: غواړو چې 27000 افغانۍ د احمد او مسعود ترمنځ د 2 پر 3 په نسبت وويشو.
لومړی لاندې جدول بشپړ کړئ.

احمد	مسعود	مجموعه
2	3	5
x	y	27000

د احمد برخه: $x = \frac{27000}{5} \times 2 = 5400 \times 2 = 10800$

د مسعود برخه: $y = \frac{27000}{5} \times 3 = 5400 \times 3 = 16200$

تمرين

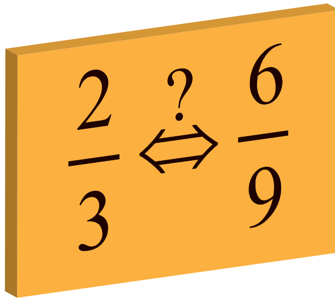
1- که چېرې د دوو عددونو نسبت $\frac{3}{5}$ او دويم عدد يې 25 وي، لومړی عدد يې معلوم کړئ.

2- دوه تنه په ګډه کار کوي چې د هغو د پيسو مجموعه 280 افغانۍ او نسبت يې $\frac{3}{4}$ دی. آیا پيدا کولای شئ چې لومړي تن او دويم تن هر يوه څو افغانۍ اخيستی دي.

3- د $\overline{AB}$ د توټه خط اوږدوالی 32cm دی د M ټکی داسې وټاکئ چې نوموړې توټه خط د $\frac{AM}{BM} = \frac{3}{5}$ په نسبت وويشي د $\overline{AM}$ او $\overline{BM}$ اوږدوالی پيدا کړئ.

4- 321.3 منه غنم په دريو تنو بزګرانو باندې د 7، 9 او 5 په نسبت وويشئ.

تناسب
Proportion



- د $\frac{3}{5}$ په نسبت کې څو عددونه وينئ؟
- د $\frac{2}{3}$ او $\frac{6}{9}$ نسبتونو ترمنځ څه ډول اړيکه شته؟

آيا کولی شئ يو بل نسبت وليکئ چې له پورتنيو نسبتونو سره مساوي وي.

فعاليت

د پنسل پاکونو او قلمونو د شمېر نسبت 3 پر 4 دی.

1- د پنسل پاکونو د شمېر او قلمونو د شمېر د نسبت په پام کې نيولو سره لاندې جدول بشپړ کړئ:

د پنسل پاکونو شمېر	3	6
د قلمونو شمېر	4	
نسبت		

- د پنسل پاکونو د شمېر نسبت پر قلمونو باندې په هر يوه درکړل شوي نسبت کې يو له بله سره پرتله کړئ.
- د نسبتونو په پورته مساوات کې يعنې $3:4=6:8$ د کومو جوړو عددونو د ضرب حاصل يو له بل سره مساوي دي؟ ولې؟

هغه وخت څلور مقداره يو تناسب جوړوي چې د لومړي او دويم مقدار نسبت د دريم او څلورم مقدار له نسبت سره مساوي وي.

مثال: په لاندې نسبتونو کې مساوي نسبتونه وښياست:

$\frac{5}{8}, \frac{9}{6}, \frac{3}{6}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

حل: که چېرې د $\frac{3}{6}$ صورت او مخرج اختصار کړو، يعنې د هغه صورت او مخرج په 3 ووېشو $\frac{1}{2}$ لاس ته راځي. نو وېلای شو چې دواړه نسبتونه يو له بله سره مساوي دي.

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

په راکړل شوو نسبتونو کې داسې یو نسبت پیداکولای نشو چې له $\frac{5}{8}$ سره مساوي وي، یعنې: د ځینو نسبتونو ترمنځ د مساواتو رابطه منځ ته راتللی نشي.

تعریف

د دوو نسبتونو مساواتو ته تناسب وایي، مثلاً $\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$ یو تناسب دی چې د $\frac{5}{8}$ او $\frac{10}{16}$ نسبتونو څخه لاس ته راغلی دی.

پورتنی تناسب په لاندې شکل هم لیکلای شو:

$$5:8=10:16$$

دلته د لومړي نسبت صورت او د دویم نسبت مخرج د طرفین په نامه یادوي همدارنگه د لومړي نسبت مخرج او دویم نسبت صورت د وسطین په نامه یادوي.

$$5:8=10:16$$

تمرین

1- په لاندې نسبتونو کې کومه جوړه نسبتونه یو له بله سره یو تناسب جوړوي؟

a) $\frac{3}{8}$, $\frac{12}{30}$ c) $\frac{7}{3}$, $\frac{35}{15}$

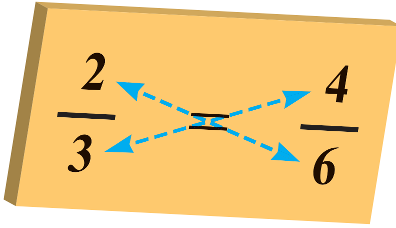
b) $\frac{2}{5}$, $\frac{40}{100}$ d) $\frac{49}{35}$, $\frac{7}{5}$

2- د یوه تناسب درې حده درکړل شوي دي، نامعلوم حد یې پیدا کړئ.

a) $\frac{2}{6}=\frac{5}{\square}$ b) $\frac{14}{8}=\frac{7}{\square}$ c) $\frac{1}{3}=\frac{2}{\square}$

d) $\frac{\square}{9}=\frac{3}{27}$ e) $\frac{\square}{8}=\frac{6}{12}$ f) $\frac{\square}{14}=\frac{21}{7}$

د تناسب خواص
Properties of proportion



- څلور عددونه داسې وټاکئ چې يو تناسب جوړ کړي.
- په جوړ شوي تناسب کې د عددونو تر منځ څه ډول اړيکه پيداکولای شئ؟

فعاليت

د درکړشوو قيمتونو په پام کې نيولو سره لاندې جدول بشپړ کړئ.

a	b	c	d	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	a . d	b . c
4	12	2	6	$\frac{4}{12}$			
5	20		8		$\frac{2}{8}$	40	

- د $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ په تناسب کې (a ، d) او همدارنګه (b ، c) په څه نامه يادېږي؟
- د جدول د ټولو قيمتونو لپاره په $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تناسب کې د $a\cdot d$ او $b\cdot c$ د ضرب حاصل له يو بل سره پرتله کړئ.

په عمومي توګه ويلای شو:

لومړی خاصيت: په دوه مساوي نسبتونو کې چې يو تناسب جوړوي د طرفينو او وسطينو د ضرب حاصل يو له بله سره مساوي دي.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a\cdot d=b\cdot c$$

مثال: د طرفينو او وسطينو تر منځ د خاصيت په کارولو سره په لاندې تناسب کې نامعلوم جز پيدا کړئ:

حل:

$$\frac{2}{5}=\frac{\square}{12}$$

$$2\times 12=5\times\square$$

$$\square=24\div 5=4.8$$

فعالیت

د درکړ شوو قیمتونو په پام کې نیولو سره لاندې جدول بشپړ کړئ.

a	b	c	d	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{d}$	$\frac{d}{b}$	$\frac{c}{a}$
3	4	6	8	$\frac{3}{4}$					
9	12	21	28			$\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$			

- د جدول د ټولو قیمتونو لپاره وګورئ چې هره جوړه $(\frac{a}{b},\frac{c}{d}),(\frac{a}{c},\frac{b}{d})$ او $(\frac{d}{b},\frac{c}{a})$ نسبتونه، تناسب جوړوي او که نه؟

په عمومي توګه ویلای شو:

دویم خاصیت: که چېرې په یوه تناسب کې د وسطینو ځایونه بدل شي یو نوی تناسب لاس ته راځي.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

دریم خاصیت: که چېرې په یوه تناسب کې د طرفینو ځایونه سره بدل کړو، یو نوی تناسب جوړېږي.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$

مثال: د یوه مستطیل د اوږدوالي او سور نسبت $\frac{4}{3}$ دی. ددې مستطیل اوږدوالي او سور دوه برابره کوو، د نوي مستطیل د اوږدوالي او د سور نسبت څومره دی؟ آیا د دواړو مستطیلونو د اوږدوالي او سور نسبتونه یو تناسب جوړوي؟

حل: د نوي مستطیل د اوږدوالي او سور نسبت $\frac{8}{6}$ دی.

د دې لپاره چې پوه شو د $\frac{4}{3}$ او $\frac{8}{6}$ نسبتونه یو تناسب جوړوي او که نه؟

باید د طرفینو او وسطینو د ضرب حاصل سره مساوي وي.

$$\frac{4}{3}=\frac{8}{6}\Rightarrow 4\times6=8\times3$$

فعالیت

د درکړشوو قیمتونو له مخې لاندې جدول بشپړ کړی.

a	b	c	d	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{d}{c}$
2	3	8	12	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{2}$	
6	9	10	15		$\frac{10}{15}$		

• د $(\frac{c}{d},\frac{a}{b})$ او $(\frac{d}{c},\frac{b}{a})$ نسبتونه د جدول د ټولو عددونو لپاره وګورئ چې تناسب جوړوي او که نه؟

په عمومي توګه ویلای شو:

ځلورم خاصیت: که چېرې دوه نسبتونه یو تناسب جوړ کړي، د هغو سرچپه (معکوس) هم یو تناسب جوړ وي.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

فعالیت

د درکړل شوو قیمتونو له مخې لاندې جدول بشپړ کړئ.

a	b	c	d	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{a+b}{b}$	$\frac{c+d}{d}$	$\frac{a-b}{b}$	$\frac{c-d}{d}$
6	9	12	18	$\frac{6}{9}$		$\frac{6+9}{9}$			
12	18	24	36		$\frac{24}{36}$				

• د جدول د ټولو قیمتونو لپاره وګورئ چې هره جوړه $(\frac{a}{b},\frac{c}{d})$، $(\frac{a+b}{b},\frac{c+d}{c})$ او $(\frac{a-b}{b},\frac{c-d}{d})$ نستبونه، تناسب جوړوي او که نه؟

پنځم خاصیت: که چېرې دوه نسبتونه یو تناسب جوړ کړي او د هر نسبت مخرج له صورت سره جمع او حاصل یې پر لومړنۍ مخرج ولیکو بیا هم یو تناسب لاس ته راځي.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

شپږم خاصیت: که چېرې په یو تناسب کې د هر نسبت مخرج له صورت څخه تفریق او حاصل یې پر لومړي مخرج ولیکو یو نوی تناسب لاس ته راځي.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

فعالیت

د درکړل شوو قیمتونو له مخې لاندې جدول بشپړ کړئ.

a	b	c	d	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{a+c}{b+d}$
1	2	7	14		$\frac{7}{14}$	
3	4	6	8			$\frac{3+6}{4+8}$

• د جدول د ټولو قیمتونو لپاره وګورئ چې هره جوړه $(\frac{a}{b},\frac{c}{d})$، $(\frac{a}{b},\frac{a+c}{b+d})$ او $(\frac{c}{d},\frac{a+c}{b+d})$ نسبتونه، تناسب جوړوي او که نه؟

اووم خاصیت: که چېرې په یوه تناسب کې صورتونه یو له بله سره جمع او په صورت کې او مخرجونه یو له بل سره جمع او په مخرج کې ولیکل شي، نو نوی نسبت منځ ته راځي چې له هرٍ راکړل شوي نسبت سره مساوي دی او نوي تناسبونه جوړوي.

مثلاً:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d},\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}\Rightarrow\frac{3+6}{4+8}=\frac{9}{12}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{9}{12}\Rightarrow 3\times12=4\times9$$

$$\frac{6}{8}=\frac{9}{12}\Rightarrow 6\times12=9\times8$$

تمرین

1- لاندې مساواتونه د درکړل شوو عددونو په نظر کې نیولو سره په عددی شکل سره ولیکئ:

• که چېرې $a=10$ ، $b=5$ ، $c=30$ او $d=15$ وي: $\frac{b}{a-b}=\frac{d}{c-d}$

• که چېرې $a=8$ ، $b=9$ ، $c=32$ و $d=36$ وي: $\frac{b}{a+b}=\frac{d}{c+d}$

2- که چېرې $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ وي څرنګه کولی شو د تناسب د خاصیت په کارولو سره د $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ تناسب په لاس راوړو؟



د تناسب ډولونه

1- مستقیم تناسب Direct proportion

د ټولګي ښارونکی د لاسي کارونو د جوړولو لپاره هر زده کوونکي ته 2 بستې رنګه کاغذ ورکوي. که چېرې اتم ټولګی 20 زده کوونکي ولري څو بستو رنګه کاغذ ته اړتیا ده تر څو ټولو زده کوونکو ته یې ورکړي؟

فعالیت

د یو کیلوګرام او 10 کیلوګرامه بورې د بیې په پام کې نیولو سره لاندې جدولونه بشپړ کړئ

اندازه (مقدار)	1 کیلوګرامه	2 کیلو ګرامه	3 کیلو ګرامه	4 کیلو ګرامه	5 کیلو ګرامه
بیه	50 افغانۍ				

اندازه (مقدار)	10 کیلو ګرامه	9 کیلو ګرامه	8 کیلو ګرامه	7 کیلو ګرامه	6 کیلو ګرامه
بیه	500 افغانۍ				

- د بورې د اندازې په زیاتېدو سره د هغې بیه څه ډول بدلون مومي؟
- د بورې د اندازې په کمېدو سره د هغې بیه څه ډول بدلون کوي؟
- د بورې د اندازې او بیې ترمنځ څه ډول اړیکه وجود لري؟

له پورته فعالیت څخه ویلی شو چې:

د بورې اندازه د هغې له بیې سره مستقیمه اړیکه لري یعنې، په هره اندازه چې بوره زیاته شي بیه یې هم زیاتیږي او په هر اندازه چې بوره کمه شي بیه یې هم کمیږي.

تعریف

که چېرې په یوه تناسب کې د لومړي مقدار په زیاتیدو، دویم مقدار هم زیات شي او یا د لومړي مقدار په کمیدو، دویم مقدار هم کم شي دغه ډول تناسب ته مستقیم تناسب وایي، یعنې نوموړي مقدارونه یو له بل سره مستقیماً متناسب دي.

مثال: که چېرې د 8 قطیو اورلگیت بیه 4 افغانۍ وي د 62 قطیو بیه به څو افغانۍ وي؟

حل: که چېرې د 62 قطیو اورلگیت بیه m افغانۍ وي. څرنگه چې د اورلگیت د قطیو شمیر دهغو له بیې سره مستقیماً متناسب دي، نو دا یو مستقیم تناسب دی.

اورلگیت	بیه
8	4
62	m

$$\frac{8}{62}=\frac{4}{m}$$

$$m=\frac{4\times 62}{8}=31 \text{ افغانۍ}$$

تمرین

1- د 12 تنو کارکوونکو اجوره 480 افغانۍ ده د 10 تنو اجوره پیدا کړئ. (د ټولو کارکوونکو اجوره برابره ده)

2-که چېرې یو تن کارکوونکی په 5 ورځو کې 1500 افغانۍ اجوره واخلي، د هغه د 18 ورځو اجوره څو افغانۍ کېږي؟

3- که چېرې د 3 مترو ټوکر د رانیولو لپاره 330 افغانیو ته اړتیا وي. د 15 مترو ټوکر رانیولو ته به څو افغانۍ په کار وي؟

2- معکوس تناسب
Indirect proportion



د ټولګي ښارونکی د ټولګي له پاکولو څخه وروسته غواړي چې ټولګی منظم کړي. که چېرې یو زده کوونکی ټولګی په 60 دقیقو کې پاک کړي. 6 زده کوونکي یې په څو دقیقو کې پاکولی شي؟

فعالیت

که چېرې یو رنګمال یوه کوټه په څلورو ورځو کې رنګ کړي، نو که په یوې یا دوو ورځو کې مو په کار وي څو رنګمالانو ته اړتیا ده؟
د پوښتنې د ځواب لپاره لاندې جدول د درکړل شوو قیمتونو په پام کې نیولو سره بشپړ کړئ:

۱ ورځ	۲ ورځې	۴ ورځې	په ورځو کې سرته رسېدلې کار
		1	د کار کوونکو شمېر

- د ورځو په لړېدو سره د کار کوونکو شمېر زیاتېږي او که کمېږي؟
- د کار په سرته رسیدو کې د ورځو د او کارکوونکو د شمېر تر منځ څه ډول اړیکه وجود لري؟

تعریف

که چېرې په یو تناسب کې د یوه کمیت مقدار زیات او باالمقابل د بل کمیت مقدار کم شي او یا د یوه کمیت مقدار کم او د بل کمیت مقدار زیات شي، دا ډول تناسب د معکوس تناسب په نامه یادېږي، یعني د لومړي کمیت او دویم کمیت ترمنځ معکوسه اړیکه یا رابطه وجود لري.

مثال: 20 تنه یو جومات په 15 ورځو کې جوړوي که چېرې وغواړو چې دا جومات په 10 ورځو کې جوړ شي، نو څو تنو کارکوونکو ته اړتیا ده؟
حل: دا تناسب معکوس دی، ځکه چې د لږو ورځو لپاره زیاتو کارکوونکو ته اړتیا شته.

تنه	$\frac{1}{\text{ورځ}}$
20	$\frac{1}{15}$
m	$\frac{1}{10}$

$$\frac{20}{m}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{10}}=\frac{10}{15}\quad,\quad\frac{20}{m}=\frac{10}{15}\quad,\quad m=\frac{20\times 15}{10}=30$$

تمرین

1- د اوبو څلور نله یو حوض په 8 ساعتو کې ډکوي، 5 نله به نوموړی حوض په څو ساعتونو کې ډک کړي؟ (د نلونو قطرونه یو له بله سره مساوي دي)

2- یو موټر په یو ساعت کې د 50 کیلومترو په چټکتیا سره لاره وهي او د دوو ښارونو تر منځ واټن په 3 ساعتو نو کې وهي که چېرې د یو بل موټر چټکتیا په یوه ساعت کې 75 کیلو متره وي، نو د نوموړو ښارونو تر منځ واټن به په څو ساعتونو کې ووهي؟

مرکب تناسب
compound proportion

$$\frac{5}{3}=\frac{25}{15}=\frac{30}{18}$$

تناسب په څو ډوله دی؟
کېدای شي یو تناسب یوازې مستقیم او یا معکوس وي؟
آیا داسې یو تناسب پېژنئ چې په عین وخت کې هم مستقیم او هم معکوس وي؟

فعالیت



د چای دوه کاچوغې شربت د اوبو په یو ګیلاس کې له مخامخ شکل سره سم حل شوی دی، د هر ګیلاس د اوبو او شربت نسبت 1 پر 2 دی. د مخامخ شکل جګ د 2 ګیلاسونو اوبو ځای لري. د شکل سره سم د چای خوړلو 4 کاچوغې شربت په هغه کې حل شوی دی، آیا د ګیلاس او جګ د اوبو خوږوالی به په یوه اندازه وي؟
لاندې جدول بشپړ کړئ:

د ګیلاسونو شمېر	1	2	3	4
د کاچوغو شمېر	2		6	

- د اوبو د ګیلاسونو د شمېر او د شربت د کاچوغو د شمېر نسبت ولیکئ.
- ددې نسبتونو ترمنځ څه ډول رابطه شته؟

له پورته فعالیت څخه ویلی شو:
په هر اندازه چې د اوبو د ګیلاسونو شمېر زیات یا لږ شي، د شربت د کاچوغو شمېر متناسباً بدلون کوي، تر څو د $\frac{1}{2}$ نسبت ثابت پاتې شي. له دې امله پورتنی جدول د تناسب یو جدول دی.

یادونه: د تیر جهت پورته خوا ته د مستقیم او ښکته خوا ته د معکوس تناسب په معنا په کار وړل شوی دی.

لومړی مثال: 5 تنه کارکوونکي د 4 ورځو کار لپاره 80000 افغانۍ مزدوري اخلي. 8 تنه به د 6 ورځو کار لپاره څو افغانۍ مزدوري واخلي؟

حل: ښکاره ده چې د نسبتونو تر منځ رابطه مستقيمه ده نو لاندې جدول جوړوو.

د تنو شمیر	ورځې	مزدوري
5	4	80000
8	6	x

$$\frac{80000}{x}=\frac{5}{12} \,,\quad \frac{80000}{x}=\frac{4\times5}{6\times8}$$

$$x=192000$$

دويم مثال: که چیرې 10 تنه یو کانال چې اوږدوالی يې 12 متره دی، په 8 ورځو کې وکني نو 5 تنه هغه ته ورته کانال چې اوږدوالی يې 15 متره دی، په څو ورځو کې کنلای شي.

حل: ښکاره ده چې متحول يعنې د ورځو شمیر د تنو له شمیر سره معکوس تناسب او د کانالونو له اوږدوالي سره مستقيم تناسب لري، نو په لاندې ډول يې حلوو:

د تنو شمیر	اوږدوالی	ورځې
10	12	8
5	15	x

$$x=\frac{8\times15\times10}{12\times5} \,,\quad \frac{8}{x}=\frac{12\times5}{15\times10}$$

$$x=20$$

تعریف

له دوو څخه د زیاتو نسبتونو مساوي والي ته مرکب تناسب ویل کیږي، په مرکب تناسب کې د لومړي نسبت صورت او د نورو نسبتونو مخرجونه طرفين، د لومړي نسبت مخرج او د نورو نسبتونو صورتونو ته د تناسب وسطين ویل کیږي.

لکه:

$$\frac{2}{3}=\frac{6}{9}=\frac{18}{27}$$

18 ← وسطين

27 ← طرفين

تمرين

1- که چیرې 24 تنه بزګران د ورځې 8 ساعته کار وکړي، یوه ځمکه چې 2000 متر مربع پراخوالی لري په 20 ورځو کې په بېلونو واړوي. که چیرې 40 تنه بزګران د ورځې 12 ساعته کار وکړي یوه بله توټه ځمکه چې 3000 متر مربع پراخوالی لري په څو ورځو کې به يې په بیل واړوي؟

2 - که چیرې د 4200 کیلو ګرامو غنمو د وړلو لپاره د 810 کیلو مترو په واټن 500 افغانیو ته اړتیا وي د 6000 کیلو ګرام غنمو وړلو لپاره د 630 کیلو متر په واټن څو افغانیو ته اړتیا ده؟

فیصد

Percentage

$$\frac{15}{11} = \frac{100}{x}$$

د یو ښوونځي د والیبال ټیم 15 لوبې سر ته رسولي خو 11 لوبې یې ګټلي دي، خو د بل ښوونځي د والیبال ټیم 12 لوبې سر ته رسولي او 10 لوبې یې ګټلي دي. ستاسو په نظر کوم ټیم زیاتې لوبې ګټلي دي؟

فعالیت

اوبه	تیل
20	80
x	100

که چېرې په 80 لیترو تیلو کې 20 لیتره اوبه ګډې وي نو په 100 لیترو کې څو لیتره اوبه ګډې دي؟

- د پورته قیمتونو په پام کې نیولو سره تناسب جوړ کړئ.
- د طرفین او وسطین د خاصیت په کارولو سره د x قیمت پیدا کړئ چې په 100 لیترو کې څو فیصده اوبه شته؟

لومړی مثال: یوه سړی په بانک کې 45000 افغانۍ کېښودلې. له څه وخت وروسته یې 900 افغانۍ ګټه وکړه. نوموړي سړي له خپلې اصلي سرمایې څخه څو فیصده ګټه اخیستې ده؟

حل:

ګټه	سرمایه
900	45000
x	100

$$\frac{45000}{100} = \frac{900}{x}$$

$$x = \frac{900 \times 100}{45000} = \frac{90000}{45000} = \frac{90}{45} = 2\%$$

د مثال له حل څخه پوهېږو چې نوموړي سړي په هر 100 افغانیو کې 2 افغانۍ یا 2% ګټه کړې ده.

دويم مثال: د پوهنتون دکانکور په آزموینه کې د حبیبې د لیسې له 320 تنو فارغانو څخه 256 تنه بریالي او د غازي د لیسې له 400 تنو فارغانو څخه 300 تنه بریالي شوي دي. ویلای شئ چې له نوموړو ښوونځیو څخه په ازموینه کې کوم یوه ښوونځي زیات بریالي ورکړي دي؟

د بریالیو زده کوونکو سلنه (فیصدي) څو ده؟

حل:

د حبیبې د لیسې د بریالیو فارغانو فیصدي
$$x = \frac{256\times 100}{320} = \frac{2560}{32} = 80\% \quad , \quad \frac{256}{x} = \frac{320}{100}$$

بریالي	فارغان
256	320
x	100

د غازي د لیسې د بریالیو فارغانو فیصدي
$$x = \frac{300\times 100}{400} = \frac{300}{4} = 75\% \quad , \quad \frac{300}{x} = \frac{400}{100}$$

بریالي	فارغان
300	400
x	100

نو ویلای شو چې د کانکور په ازموینه کې د حبیبې لیسې نسبت د غازي لیسې ته زیات بریالي ورکړي دي.

تعریف

فیصدي د داسې کسر ښودنه ده چې په مخرج کې یې 100 وي. د فیصدي د ښودلو لپاره د % نښې څخه کار اخیستل کیږي.

تمرین

1- یو هټیوال په یوه میاشت کې دوه واري مالونه راوړي دي. لومړی وار یې د 25000 افغانیو په پانګې، 800 افغانۍ ګټه کړې ده او دویم وار یې د 10000 افغانیو په پانګې، 330 افغانۍ ګټه کړې ده. نوموړي هټیوال کوم واري نظر سرمایې ته زیاته ګټه کړې ده؟

2- عبدالرحیم د ریاضي په مضمون کې له 75 نمرو څخه 60 نمرې لاس ته راوړې، د ریاضي په مضمون کې د عبدالرحیم د نمرو فیصدي په لاس راوړئ؟

3- په لاندې مساواتونو کې کوم یو یې سم دی؟ هغه چې سم نه دي صحیح نسبت یې ولیکئ.

$$30\% = \frac{30}{50} \quad , \quad 4\% = \frac{4}{100} \quad , \quad \frac{21}{100} = 21\% \quad , \quad \frac{111}{1000} = 11\% \quad , \quad 50\% = \frac{1}{2}$$

احدیت یا واحد
Unitary



که چېرې په عمومي توګه د یوه جنس د خو شیانو یا دانو قیمت درکړ شوی وي. څرنګه کولای شي د هغې یوې دانې قیمت پیدا کړئ؟

- که چېرې د یوه قلم قیمت درکړل شوی وي آیا د هغه د څو دانو قیمت پیدا کولای شي؟

فعالیت

د کمپسونو او د ورځو د شمېر نسبت چې یو ګنډونکی یې ګنډي، $\frac{28}{4}$ دی، یعنې داګنډونکی 28 کمپسونه په 4 ورځو کې ګنډي په یوه ورځ کې به څو کمیسونه وګنډي؟
د پورته وینا له مخې لاندې جدول بشپړ کړئ:

x	28	د کمیسونو شمېر
1	4	ورځې
		نسبت

- د پورته جدول له مخې تناسب جوړ کړئ.
- د طرفین او وسطین له خاصیت څخه په کار اخیستنې د x قیمت پیدا کړئ.

په پایله کې ویلای شو که چېرې د څو شیانو قیمت راکړل شوی وي کولای شو د یوې دانې قیمت پیدا کړو.

لومړی مثال: د تیلو د یوه بیرل (200لیترو) بیه 40000 افغانۍ ده. د هغه د یوه لیتر بیه پیدا کړئ.

افغانۍ	تیل
40000	200
x	1

$$\frac{200}{1}=\frac{40000}{x}$$

$$200x=40000$$

$$x=\frac{40000}{200}\quad,\quad x=200$$

دویم مثال: د پنسل یو درجن (12 داني) قلمونه په 60 افغانیو را نیول شوي دي د هغه د 7 دانو قیمت څو افغانۍ کیږي؟

لومړی د یوه قلم قیمت پیدا کوو.

د پنسل د قلمونو شمیر	افغانۍ
12	60
1	x

$$\frac{12}{1}=\frac{60}{x}$$

$$12x=60$$

$$x=\frac{60}{12} \quad , \quad x = 5 \text{ افغانۍ}$$

نو د 7 دانو قیمت عبارت دی له:

$$5\cdot 7=35$$

د سوداګرۍ په ډېرو راکړو ورکړو کې د جنسونو او شیانو پلورل او پیرودل د درجن او د سټ په توګه کېږي کله ناکله ارتیا پیدا کېږي چې د هغو د یوه یا څو دانو قیمت پیدا کړو. ددې عمل د سرته رسولو لپاره له داسې طریقې څخه کار اخیستل کیږي چې احدیت بلل کیږي او داسې یې تعریفوو:

تعریف

احدیت د مستقیم تناسب د محاسبې یوه داسې طریقه ده چې لومړی د اړوند نسبت څخه د هغه د یوه واحد قیمت پیدا کوو او بیا یې په راکړشوي مقدار کې ضربوو.

تمرین

1- 2 متره ټوکر 300 افغانۍ بیه لري. لومړی د هغه د یوه متر بیه پیدا کړئ او بیا وواياست چې د 17 مترو بیه څو افغانۍ کېږي؟

2- د یو جنس د 60 کیلو ګرام د وړلو لګښت 2400 افغانۍ کېږي لومړی د هغه د یوه کیلو ګرام د وړلو لګښت پیدا او بیا وواياست چې د 35 کیلو ګرام د وړلو یې څو افغانۍ کېږي؟

تخفيف
Discount



ځيني وختونه به پلورنځي ته تللي یاست او دا اعلانونه به مو لیدلي یا اوریدلي وي:

د پسرلنيو جامو په بيه کې 10% تخفيف.

د سيم کارت په بيه کې 50% تخفيف.

په اجناسو کې 15% تخفيف.

فعالیت

یو زده کوونکی د کیسو د کتاب د اخیستلو لپاره د کتابونو پلورنځي ته ځي د کتاب بیه 60 افغانۍ ده نوموړی زده کوونکی 55 افغانۍ لري. کتاب پلورنکی نوموړی کتاب په زده کوونکي باندې په 55 افغانیو پلوري.

- زده کوونکي دا کتاب له اصلي بيې څخه څو افغانۍ ارزانه اخیستی دی؟
- د کتاب له اصلي بيې څخه يې څو فیصد لږې پیسې ورکړې دي؟
- که چیرې دا فیصدي د کتاب په اصلي بيه کې ضرب شي کوم عدد را ښيي؟

ویلی شو چې: په همغه اندازه چې زده کوونکي کتاب له اصلي بيې څخه ارزان اخیستی دی د کتاب تخفیف بلل کیږي.

لومړی مثال: د مېوې د اوبو ایستلو ماشین 4000 افغانۍ بیه لري او د 8% په تخفيف پلورل کیږي د پلورلو بیه یې پیدا کړئ.

حل:

تخفيف	بيه
8	100
x	4000

$$(x)\ \text{تخفیف} = 4000 \times \frac{8}{100} = 40 \times 8 = 320\ \text{افغانۍ}$$

$$\text{د پلورلو بیه} = 4000 - 320 = 3680\ \text{افغانۍ}$$

دویم مثال: یو تن یو جنس چې اصلي بیه یې 3000 افغانۍ ده له تخفیف وروسته یې په 2895 افغانیو واخیست، معلوم کړئ چې نوموړي اخیستونکی څو فیصده تخفیف اخیستی دی؟

حل: لومړی ټول تخفیف په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$3000 - 2895 = 105$$

ټول تخفیف 105 افغانۍ دي اوس د تناسب په مرسته د 100 تخفیف پیداکوو.

بیه	تخفیف
3000	105
100	x

$$\text{تخفيف } (x) = 100 \times \frac{105}{3000} = \frac{10500}{3000} = 3.5\%$$

$$(x) = 3.5\%$$

تعریف

هغه پیسې چې سوداګران یې د سیالۍ او د خپلو مشتریانو د جذب لپاره له اصلي بیې څخه کموي. تخفیف بلل کېږي. ددې تخفیف فیصدي نسبت اصلي قیمت ته د تخفیف د فیصدۍ په نامه یادېږي.

تمرین

1- د یوه بایسکل اصلي بیه 5000 افغانۍ ده که چېرې پلورونکی خپل اخیستونکي ته 2% تخفیف ورکړي، د بایسکیل بیه پیدا کړئ.

2- که چېرې د یوې ګازي بخارۍ اصلي بیه 8000 افغانۍ وي، هټیوال د خپلې ارتیا لپاره هغه په 7600 افغانۍ وپلوري، تخفیف اندازه او د تخفیف فیصدي پیدا کړئ.

3- د یوې برقي جارو بیه 5730 افغانۍ ده او هغه د 3% په تخفیف پلورل کېږي. د پلورلو بیه یې پیدا کړئ.

ساده او مرکبه ربح
Simple and compound Intrest



یو هېتیوال په یو بانک کې 1000 افغانۍ زېرمه کړې له یوه کاله وروسته یې خپلې پيسې بېرته واخیستلې چې د اخیستل شوو پيسو اندازه یې 1100 افغانۍ شوې وه د بانک له متصدي څخه یې وپوښتل چې دا 100 زیاتي شوې افغانۍ د څه شي دي؟

تعریف

هغه ګټه چې د یوې ټاکلې فیصدۍ له مخې له یوې سرمایې څخه په یوه ټاکلي وخت او ټاکلي نرخ سره لاس ته راځي، د ساده ربحې یا Simple Interst په نامه یادېږي.
څرنګه چې ساده ربح له سرمايې او ټاکلي نرخ سره مستقیماً متناسب ده. یعنې:

$$p = A \cdot R \cdot T \quad \text{ربح}$$

دلته A سرمایه، R نرخ د فیصدۍ له مخې او T وخت په کال سره ښيي.

لومړی مثال : له یوه کال څخه وروسته د 8% نرخ له مخې د 5600 افغانیو ربح(ګټه) څو افغانۍ کیږي؟

حل:

سرمایه(A) $= 5600$

نرخ (R) $= 8\% = \dfrac{8}{100}$

وخت (T) = یو کال

ربح $P = A \cdot R \cdot T = 5600 \times 1 \times \dfrac{8}{100} = 56 \times 8 =$ 448 افغانۍ

دویم مثال: له 7 میاشتو څخه وروسته د 13% نرخ له مخې د 156000 افغانیو ساده ربح حساب کړئ.

حل:

سرمایه(A) $= 156000$

نرخ (R) $= 13\% = \dfrac{13}{100}$

وخت (T) = 7 میاشتې = $\dfrac{7}{12}$ کال

ربح $P = A \cdot R \cdot T = 156000 \times \dfrac{13}{100} \times \dfrac{7}{12} = 11830$

فعالیت

لاندې جدول په پام کې ونیسئ:

د اصلي پیسو اندازه	د پیسو اندازه وروسته له 1 کال	د پیسو اندازه وروسته له 2 کاله	د پیسو اندازه وروسته له 3 کاله	د پیسو اندازه وروسته له 4 کاله
1000	1100	1210	1331	1464.1

- د هر کال د ګټې توپیر نسبت مخکني کال ته په یو جدول کې وښیاست.
- لاس ته راغلي توپیرونه ثابته اندازه لري او که نه؟
- د هر کال د ګټې نسبت نظر مخکني کال ته په یوه جدول کې وښیاست.
- آیا دا نسبتونه ثابت دي او که نه؟

تعریف

که چیرې د یوې سرمایې ګټه د اصلي سرمایې له اندازې سره یو ځای شي او بیا په ګټه ورکړل شي، هغه ګټه چې له دې سرمایې څخه لاس ته راځي د مرکبې ربحې په نامه یادېږي چې له لاندې رابطې څخه په لاس راځي.

$$P = A(1+r)^n$$

دلته P سرمایه له ګټې سره، A لومړی سرمایه، r نرخ د فیصدی له مخې او n وخت په کال سره ښیي.

مثال: د 2000000 افغانیو سرمایه د کال په 10% مرکبې ربحې سره په بانک کې اېښودل کېږي د 5 کالو وروسته نوموړې سرمایه څو افغانۍ کېږي؟

حل: قیمتونه په فارمول کې ایږدو:

$$A = 2000000,\quad r = 10\%,\quad n = 5,\quad P = ?$$

$$P = 2000000(1+\frac{1}{10})^5 = 2000000(1.1)^5$$

$$P = 2000000 \times 1.61051 = 3221020$$

$$P = 3221020$$

تمرین

1- احمد 4000 افغانۍ د 8% نرخ له مخې د مرکبې ربحې په توګه په خپل حساب کې سپما کړې ده. د کال په پای کې به ورته بانک څومره ګټه ورکړي؟

2- د 1500 افغانیو پانګې ګټه د 10% نرخ له مخې د 3 کلونو وخت لپاره څو افغانۍ کېږي؟

د دويم فصل مهم ټکي

• نسبت

د دوو همجنسو کميتونو يا مقدارونو تر منځ نسبت له هغه عدد څخه عبارت دی چې وښيي لومړی کميت د دويم کميت څو برابره دی يا يو کميت د بل کميت څومه برخه ده او يا دويم کميت څو ځلې په لومړی کميت کې شامل دی.

• په متناسبو اجزاو ويشل

د يوه عدد د ويشلو لپاره په راکړ شوو نسبتونو، لومړی د راکړ شوو نسبتونو د جمعې حاصل په لاس راوړو له هغه وروسته مفروض عدد د نسبتونو په مجموعې باندې ويشو او د وېش حاصل يې په راکړ شوي هر يوه نسبت کې ضربوو لاس ته راغلي عددونه په راکړ شوي نسبتونو باندې د نوموړی عدد ويشل دي.

• تناسب

د دوو نسبتونو مساواتونو ته تناسب وايي.

• د تناسب خواص

-1 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a\cdot d=b\cdot c$

-2 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

-3 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$

-4 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

-5 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

-6 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

-7 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d},\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

-8 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

• د تناسب ډولونه

1- **مستقیم تناسب**: که چېرې په یوه تناسب کې لومړۍ مقدار زیات او دویم مقدار یې هم ورسره زیات شي او یا که چېرې لومړۍ مقدار کم او دویم مقدار یې هم کم شي، دغه ډول تناسب ته مستقیم تناسب وایي.

2- **معکوس تناسب**: که چېرې په یوه تناسب کې د یوه کمیت مقدار زیات او باالمقابل د بل کمیت مقدار کم شي او یا د یوه کمیت مقدار کم او د بل کمیت مقدار زیات شي، دا تناسب د معکوس تناسب په نامه یادېږي.

• مرکب تناسب:

له دوو څخه د زیاتو نسبتونو مساوي والي ته مرکب تناسب ویل کېږي.

• فیصد

فیصد د داسې یوه کسر ښودونکی دی چې مخرج یې 100 وي.

• احدیت:

احدیت د مستقیم تناسب د محاسبې یوه داسې طریقه ده چې لومړی د اړوند نسبت څخه د هغه د یوه واحد قیمت پیداکوو او بیا په راکړ شوې مقدار کې یې ضربوو.

• تخفیف:

هغه پیسې چې سوداګران یې د سیالۍ او د خپلو مشتریانو د جذب لپاره له اصلي بیې څخه کموي تخفیف بلل کیږي. ددې تخفیف فیصدي نسبت اصلي قیمت ته د تخفیف د فیصدي په نامه یادېږي.

• ربح

- **ساده ربح**: هغه ګټه چې د یوې ټاکلې فیصدي له مخې له یوې سرمایې څخه په یوه ټاکلې وخت او ټاکلې نرخ سره لاس ته راځي د ساده ربحې یا Simple Interst په نامه یادېږي.

$$P = A \cdot R \cdot T$$

- **مرکبه ربح**: که چېرې د یوې سرمایې ګټه د اصلي سرمایې له اندازې سره یو ځای شي او بیا ګټې ته کیښودل شي، هغه ګټه چې له دې نوي سرمایې څخه لاس ته راځي د مرکبې ربحې په نامه

$$P = A(1+r)^n$$

عمومي پوښتنې

یادېږي.

د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه درکړ شوي دي د سم ځواب څخه يې کرښه تاو کړئ:

1- د دوو کمیتونو نسبت داسې یو عدد دی:

a) منفي b) مثبت c) له واحد څخه پرته d) هیڅ یو

2- د فیصد نښه عبارت ده، له:

a) × b) ÷ c) + d) %

تش ځایونه په مناسبو کلمو سره ډک کړئ.

1- په تناسب کې د لومړي نسبت صورت او دویم نسبت مخرج د .... په نامه او د لومړي نسبت مخرج د دویم نسبت صورت د .... په نامه یادېږي.

2- په مستقیم تناسب کې دواړه کمیتونه په عین وخت کې .... یا .... کیږي.

3- هغه ګټه چې له یوې ټاکلې سرمایې څخه په یوه ټاکلې .... او په یوه ټاکلې .... د یوې فیصدي له مخې لاس ته راځي د ساده................................ په نامه یادېږي.

4- هغه کسر چې مخرج يې .... وي د .... په نامه یادیږي.

لاندې یو شمېر جملې درکړ شوي دي، د سمې جملې مخې ته د (ص) توري او د ناسمې جملې مخې ته د (غ) توري ولیکئ:

1- ( ) په یوه تناسب کې د لومړي نسبت صورت او دویم نسبت مخرج د طرفین په نامه او د لومړي نسبت مخرج د دویم نسبت صورت د وسطین په نامه یادېږي.

2- ( ) که چېرې د یوې پانګې ګټه له اصلي پانګې سره یو ځای او بیا ګټې ته کیښودل شي نوې پانګه چې په لاس راځي د ساده ربحې په نامه یادېږي.

3- ( ) فیصد داسې کسر دی چې مخرج يې 100 وي.

4- ( ) تخفیف مستقیم تناسب دی چې لومړی له اړوند نسبت څخه د یو واحد قیمت پیدا او بیا په راکړ شوي مقدار کې يې ضربوو.

5- ( ) د دوو تناسبونو مساواتو ته نسبت وايي.

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1- د دوو ښوونځیو د زده کوونکو شمېر په ترتیب 720 او 810 تنه دي. د نوموړو ښوونځیو د زده کوونکو ترمنځ نسبت په لاس راوړئ.

2- په یوه بڼ کې 45 ونې د منو، 30 ونې د ناکو او 75 ونې د انارو دي. د دوه دوه ډولونو ترمنځ نسبت پیدا کړئ.

3- د 3 مترو ټوکر د رانیولو لپاره 450 افغانیو ته اړتیا ده . نو د 15 مترو ټوکر رانیولو ته به څو افغانۍ په کاروي؟

4- 27 تنه یو رستورانت په 20 ورځو کې جوړ وي، که چېرې وغواړو چې دا رستورانت په 15 ورځو کې جوړ شي، د هغه لپاره څو تنه په کار دي؟

5- د ملالۍ د عالي لېسې په یوه ټولګي کې د 50 تنو په شمېر نجونې شاملې دي، د هغو ښوونکی غواړي په داسې دوو ګروپونو یې ووېشي چې د هغو تر منځ نسبت $\frac{2}{3}$ وي. د هر ګروپ شمېر معلوم کړئ؟

6- $1200m^2$ ځمکه 14 کسه په دې شرط چې 3 ساعته د ورځې کاروکړي په 8 وروځو کې بېل وهي، $1500m^2$ ځمکه 10 کسه چې د ورځې 6 ساعته کار وکړي په څو ورځو کې بیل وهلی شي؟

7- د ښوونځي اداره له یوه کتاب پلورنکي څخه د 2560 افغانیو کتابونه را نیولي دي، د دې لپاره چې کتاب پلورنکی نوموړي اخیستونکی خپل پېرویدونکي (مشتري) وګرځوي د اصلي قیمت څخه 5 فیصده لږ افغانۍ اخلي معلوم کړئ چې د ښوونځي اداره څومره افغانۍ کتاب پلورونکي ته ورکړي دي؟

8- دوه سوداګر د 2540000 افغانیو په ګډه پانګې سوادګري کوي، د هغو د پانګې نسبت $\frac{3}{5}$ دی. د هر یوه پانګه پیدا کړئ؟

9- 12000 افغانۍ پانګه د کال 6 فیصده د مرکبې ربحې په ډول په بانک کې ایښودل کېږي د 4 کلونو د تیریدو وروسته نوموړې پانګه څو افغانې کیږي؟

10- که چېرې یو کال مخکې د یوه کلي نفوس 600 تنه شمېرل شوي وي او د کلي نفوس د کال 3 فیصده زیات شوي وي د کلي اوسنی نفوس څو تنه دی؟

11- په یوه کال کې د 4800 افغانیو ګټه د 9 فیصده نرخ له مخې څو افغانۍ کېږي؟

دریم فصل

مشابهتونه





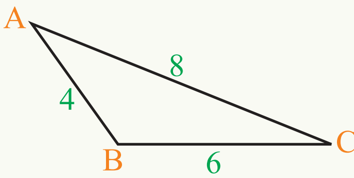
ورته (مشابه) شکلونه

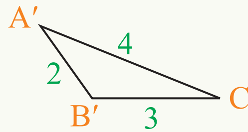



آیا هم ډوله شکلونه مو په بېلو اندازو لیدلي دي؟
زموږ په شاوخوا کې داسې شکلونه شته چې اندازه یې یو له بله سره مساوي نه وي، خو هم ډوله (هم شکله) وي، مثلاً: د پغمان د تاق ظفر تصویرونه چې یو یې لوی او بل یې کوچنی دی، خو د شکل له نظره یو بل ته ورته دي.

فعالیت

لاندې دوه مثلثونه په پام کې ونیسئ:

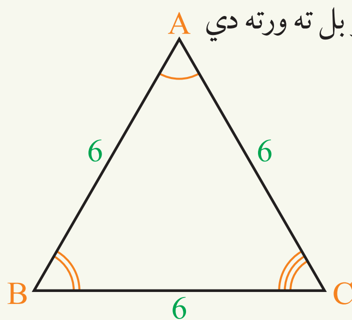


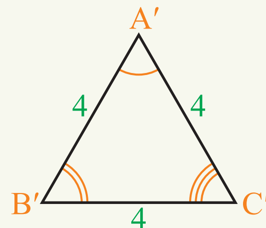


- آیا فکر کوئ چې پورته مثلثونه یو بل ته ورته دي؟
- په پورته مثلثونو کې متناسبې ضلعې او مساوي زاویې په نښه کړئ.
- هم ډوله زاویې د نقالې په واسطه اندازه او پرتله یې کړئ.
- د متناسبو ضلعو نسبتونه حساب کړئ.

پورتنی فعالیت موږ ته راښیي چې:
په ورته شکلونو کې د متناسبو اضلاعو پر وړاندې زاویې یو له بله سره یو په یو انطباق منونکې دي او د متناسبو ضلعو نسبتونه د یو ثابت مقدار دي چې دې ثابت مقدار ته د ورته والي نسبت وايي که چېرې دوه شکلونه داسې اړیکې ولري ، دا شکلونه، سره ورته شکلونه دي ، دوه ورته شکلونه د (~) نښې په واسطه ښيي.

مثال: غوارو وښيو چې دوه متساوي الاضلاع مثلثونه يو بل ته ورته دي





حل: د دواړو مثلثونو ټولې زاويې يو له بل سره انطباق منونکي دي.

$\hat{A} \cong \hat{A}'$, $\hat{B} \cong \hat{B}'$, $\hat{C} \cong \hat{C}'$

د ضلعو ترمنځ تناسب وجود لري.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

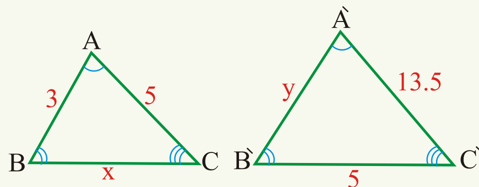
نو:

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

تمرين

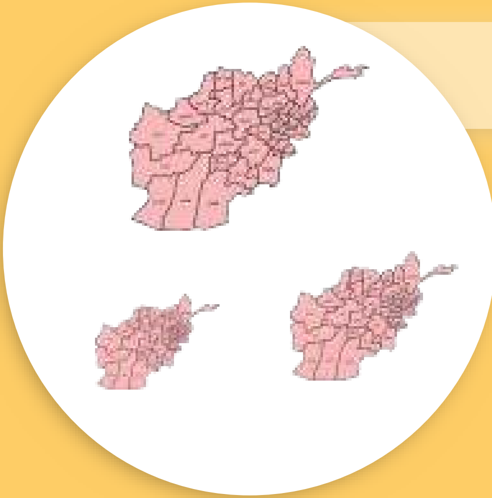
1- لاندې کومه يوه جمله تل سمه ده؟ دهرې يوې لپاره مثال ووياست.
- دوه مربع ګانې تل يو بل ته ورته دي.
- دوه مثلثونه تل يو بل ته ورته دي.
- دوه مستطيلونه تل يو بل ته ورته دي .
- دوه متساوي الساقين مثلثونه تل يوبل ته ورته دي.
- دوې لوزې ګانې تل يوبل ته ورته دي.

2- د $A'B'C'$ او ABC مثلثونه يو بل ته ورته دي. د هغو زاويې ټاکل شوي دي. د مخامخ ضلعو تر منځ يې نسبت وليکئ او وروسته د x او y اوږدوالی پيدا کړئ.



3- دوه مشابه پنځه ضلعي ګانې رسم کړئ.

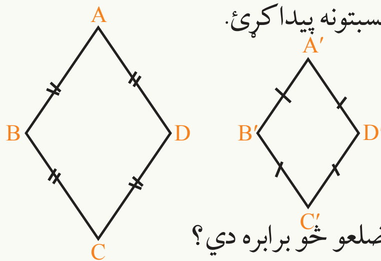
ورته (متشابه) مضلع ګانې



آیا د پورته نقشې لاندې دوه نقشې په یوه اندازه سره کوچنی شوې دي؟

فعالیت

د شکل په پام کې نیولوسره د خط کش په واسطه لاندې نسبتونه پیدا کړئ.



$\frac{BC}{B'C'}=\square$ $\frac{AB}{A'B'}=\square$

$\frac{AD}{A'D'}=\square$ $\frac{CD}{C'D'}=\square$

- د ABCD د لوزي ضلعې د $A'B'C'D'$ د لوزي د ضلعو څو برابره دي؟
- د ABCD او $A'B'C'D'$ زاويې اندازه کړئ څه اړيکه د زاويو ترمنځ شتون لري؟

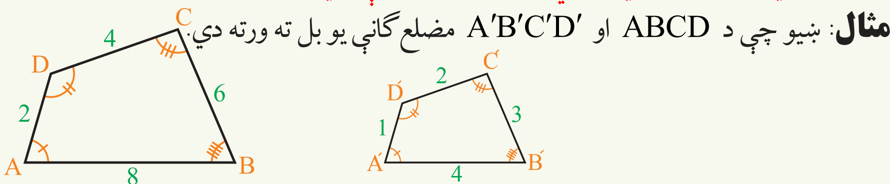
په پورته فعالیت کې لیدل کېږي چې د دواړو شکلونو د متناسبو ضلعو نسبت تل ثابت او یو له بله سره مساوي دی. همدا رنګه د متناسبو ضلعو پر وړاندې زاويې یو له بل سره مساوي دي، نو دا دوه شکلونه یوبل ته ورته دي، په پایله کې ویلای شو: څو ضلعي شکلونه مشابه بلل کېږي چې لاندې خواصونه ولري:

1- د راسونو شمېر يې مساوي وي.

2- په ورته مضلع ګانو کې باید ټولې زاويې يو په يو له يو بل سره انطباق منونکې وي.

3- د مساوي زاويو پر وړاندې ضلعې یوله بله سره متناسبې وي.

مثال: ښيو چې د ABCD او $A'B'C'D'$ مضلع ګانې یو بل ته ورته دي.



حل: د نقالي په کارولو سره په شکلونو کې لیدل کېږي، چې:

1- زاويې يو له بل سره انطباق منونکې دي:

$\hat{A} \cong \hat{A'}$, $\hat{B} \cong \hat{B'}$, $\hat{C} \cong \hat{C'}$, $\hat{D} \cong \hat{D'}$

2- د ضلعو ترمنځ تناسب شتون لري:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{D'A'}} = 2$$

$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2$$

نو دا دواړه شکلونه يو بل ته ورته دي.

په پورته مثال کې د ورته والي نسبت 2 دی، يعني د ABCD د مضلع ضلعې د A′B′C′D′ د مضلع د ضلعو دوه برابره دي، نو ABCD ~ A′B′C′D′

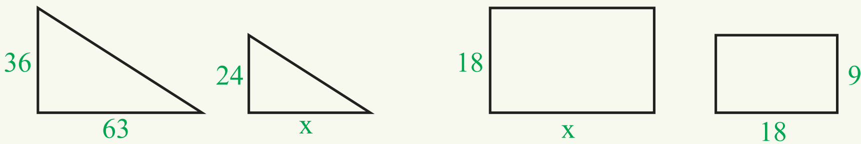
پوښتنه: د A′B′C′D′ مضلعې ضلعې د ABCD مضلعې د ضلعو څو برابره دي؟

تمرين

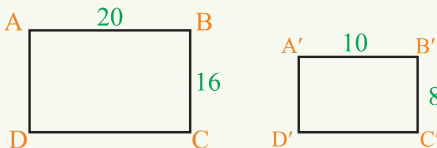
1– په لاندې شکلونو کې وښياست چې يو بل ته ورته دی.



2- لاندې هره جوړه شکلونه چې د يو بل څنګ ته رسم شوي دي ورته (مشابه) شکلونه دي. نامعلوم اوږد والی چې په x سره ښودل شوی دي، حساب کړئ.



3- په لاندې شکلونو کې وښياست چې په دوو ورته مستطيلونو کې د يوه د اوږد والي او سور نسبت د بل د اوږدوالي او سور له نسبت سره مساوي دی.



4- آيا ټول انطباق منونکي شکلونه يو بل ته ورته دي؟ په دې صورت کې د ورته والي ضريب څو دی ؟ د يوه مثال په واسطه يې وښياست.



موازي خطونه

د اورګاډي د خطونو ترمنځ فاصله يو له بله سره څه اړيکه لري.

فعاليت

- مخامخ څلور موازي خطونه په پام کې ونيسئ.
- په دې څلور خطونو باندې يو عمود خط رسم کړئ.
- هغه قطعه خطونه چې د قاطع په واسطه د موازي خطونو ترمنځ جوړ شوي، اندازه کړئ.
- يو بل خط داسې رسم کړئ چې دا څلور موازي خطونه قطع کړي.
- هغه ټوټه خطونه چې د دې قاطع او موازي خطونو په واسطه لاس ته راځي اندازه او وواياست چې يوله بله سره څه ډول رابطه لري؟
- يو بل کيفي قاطع رسم کړئ او پورته فعاليت سرته ورسوئ.

له پورته فعاليت څخه لاندې تعريف ترلاسه کولای شو:

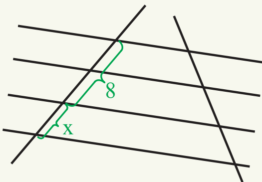
تعريف

که چېرې څو موازي خطونه، چې يو له بل څخه په مساوي فاصلو سره پراته وي، د يوه قاطع په واسطه قطع شي، موازي خطونه د قاطع خط په مخ باندې مساوي ټوټه خطونه جلا کوي.

مثال: په لاندې شکل کې موازي خطونه په مساوي فاصلو سره درکړشوي دي د x فاصله په لاس راوړئ.

حل: څرنګه چې د جلا شوي دوو ټوټه خطونو مجموعه چې د موازي خطونو ترمنځ ده، له 8 واحده سره مساوي دي.

نو هر ټوټه خط څلور واحده کېږي او x د دې هر يوه واحد سره برابر دی، نو x=4 دی.



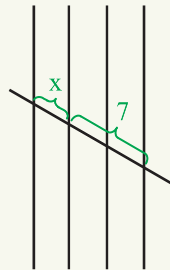
فعالیت

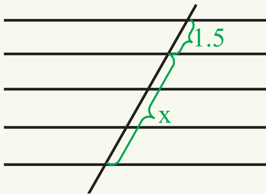
1- د $\overline{AB}$ کیفي ټوټه خط رسم کړئ.
2- د A له ټکي څخه د $\overline{AX}$ یو کیفي مستقیم خط داسې رسم کړئ چې د AB خط سره حاده زاویه جوړه کړي.
3- د $\overline{AX}$ پر مخ باندې د A له ټکي څخه پیل او 5 واحده پر له پسې جلا کړئ. دې ټکو ته په ترتیب سره M، N، P، Q او C وواياست.
4- د C ټکی له B سره ونښلوئ.
5- اوس د M، N، P او Q له ټکو څخه له $\overline{BC}$ سره موازي خطونه رسم کړئ.
6- پنځه پیدا شوي ټوټه خطونه له یو بل سره څه ډول رابطه لري؟

که چیرې وغواړو یو ټوټه خط په مساوي برخو وویشو، کولای شو په مساوي فاصلو سره د موازي خطونو له خاصیت څخه کار واخلو.

تمرین

1- په لاندې هر یوه شکل کې موازي خطونه په مساوي فاصلو سره درکړشوي دي. د x قیمت پیدا کړئ.





2- دوه ټوټه خطونه رسم کړئ، وروسته یو له هغو څخه په درې مساوي برخو او بل یې په څلورو مساوي برخو وویشئ.
3- یو ټوټه خط د 12cm په اوږدوالي سره رسم او په 8 مساوي برخو یې وویشئ.

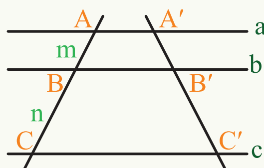
د تالس قضیه
(Thales)



دا مخامخ ودانۍ څو پوړه لري؟
آیا د پوړونو فاصلې یې یو له بله سره مساوي دي؟

فعالیت

- د a ، b او c درې موازي خطونه رسم کړئ چې یوله بله سره مساوي فاصلې و نه لري.
- دوه قاطع خطونه چې یو بل قطع نه کړي داسې رسم کړئ چې درې موازي خطونه یې په ترتیب سره د A، B ، C او A' ، C' ، B' په ټکو کې قطع کړي وي.
- لاندې نسبتونه پیدا کړئ.



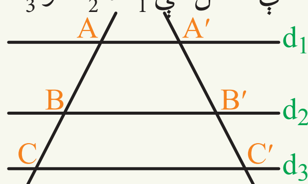
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = ?$$

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = ?$$

- یو بل کیفي قاطع رسم کړئ او د پیدا شوو ټوټه خطونو نسبت پیدا کړئ.

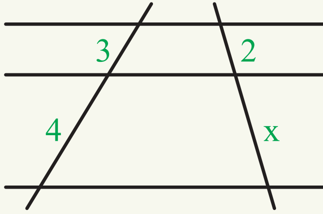
تالس یوناني ریاضي پوه(548- 624 له میلاد د مخه) د پورته فعالیت نتیجه په لاندې ډول ویلي وه.

د تالس قضیه: که چیرې دوه یا څو موازي ټوټه خطونه د دوه خطونو په واسطه قطع شي، د هغو په مخ باندې متناسب ټوټه خطونه جلا کوي، لکه: په لاندې شکل کې d_1 ، d_2 او d_3 درې موازي خطونه دي.



نو: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$

مثال: په مخامخ شکل کې د x قیمت حساب کړئ



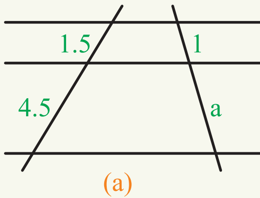
حل:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{2}{x}$$

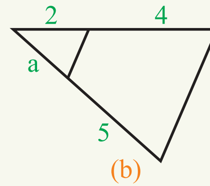
$$x = \frac{2 \cdot 4}{3} = \frac{8}{3} \Rightarrow x = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

تمرین

1- په لاندې هر یوه شکل کې د a قیمت پیدا کړئ.

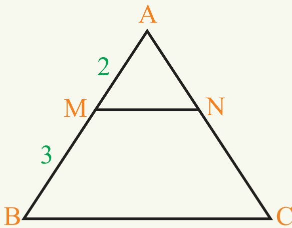


(a)



(b)

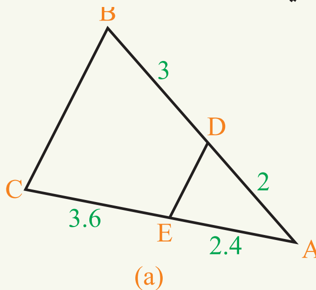
2- مخامخ شکل په پام کې ونیسئ اولاندې نسبتونه بشپړ کړئ.



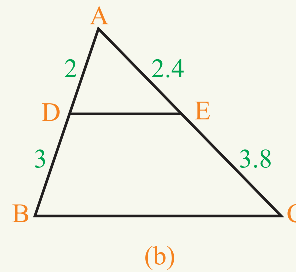
$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = ?$ $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = ?$

$\frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = ?$ $\frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} = ?$

3- په لاندې کوم یوه شکل کې $\overline{DE}$ له $\overline{BC}$ سره موازي دی؟



(a)



(b)



په مثلث کې د تالس قضیه

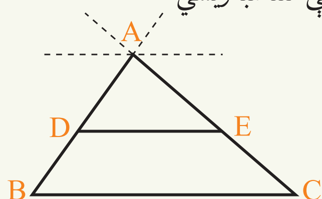
آیا کولای شئ په مثلث کې موازي خطونه ووینئ؟

فعالیت

- یو کیفي مثلث رسم کړئ او د هغه په یوې ضلعې با ندې یو ټکی په پام کې ونیسئ.
- له دې ټکي څخه د مثلث له یوې ضلعې سره موازي خط رسم کړئ، تر څو د مثلث بله ضلع قطع کړي. رسم شوی مثلث د تورو په واسطه وښیا ست.
- د رسم شوي مثلث د هري ضلعې نسبت د لومړي مثلث له متناسبو ضلعو سره ولیکئ دا نسبتونه یو له بله سره څه ډول اړیکه لري؟

د پورته فعالیت په سرته رسولو سره لاندې قضیه بیانولای شو:

لومړی قضیه: که چیرې د مثلث د یوې ضلعې له یوه ټکي څخه یو داسې خط رسم شي چې د مثلث له یوې ضلعې سره موازي وي نو د مثلث دوه نورې ضلعې متناسباً ویشي.



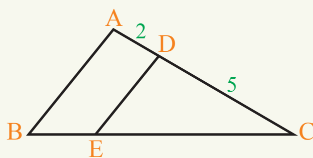
$$\overline{DE} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

دویمه قضیه: که چیرې په پورته ABC مثلث کې د D ټکی د $\overline{AB}$ په ضلعې باندې او د E ټکی د $\overline{AC}$ په ضلعې باندې داسې پروت وی چې $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$ شتون ولري نو په پایله کې $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ دی.

دا رابطه د تالس د قضیې د معکوسي قضیې په توګه پېژنو.

یعنې که یو خط د مثلث دوه ضلعې متناسباً تقسیم کړي، له دریمې ضلعې سره موازي دی.

لومړی مثال: په لاندې شکل کې $\overline{AB} // \overline{DE}$ او $\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = \frac{5}{2}$ دی د $\frac{\overline{CE}}{\overline{EB}}$ نسبت له څو سره مساوي دی؟



حل: څرنګه چې $\overline{AB} // \overline{DE}$ دی.

او دضلعو تر منځ تناسب شته یعنې:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DA}}$$

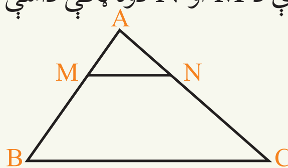
نو:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EB}} = \frac{5}{2}$$

دویم مثال: د ABC په مثلث کې د $\overline{AB}$ او $\overline{AC}$ په ضلعو باندې د M او N دوه ټکي داسې وټاکئ چې $\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AB}$, $\overline{AN} = \frac{1}{3}\overline{AC}$ وي.

آیا $\overline{MN}$ او $\overline{BC}$ سره موازي کېدای شي؟



حل: له پورته رابطو څخه لیکلای شو:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{1}{3} \quad , \quad \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{1}{3}$$

د پورته، اړیکو له پرتله کولو څخه لرو چې:

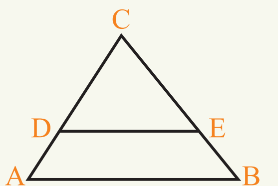
$$\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$$

څرنګه چې دضلعو په منځ کې تنا سب شته، د تالس معکوسي قضیې په اساس لیکلی شو:

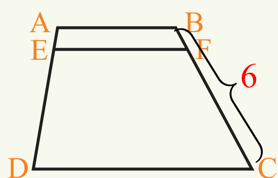
$$\overline{MN} // \overline{BC}$$

تمرین

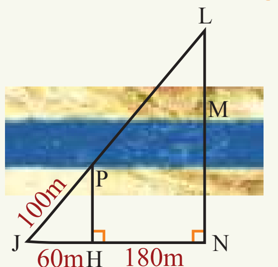
1- په مخامخ شکل کې $\overline{DE} || \overline{AB}$ ، $\overline{AC} = 12cm$ ، $\overline{BC} = 15cm$ او $\overline{EB} = 5cm$ دي د $\overline{AD}$ او $\overline{DC}$ اوږدوالی پیدا کړئ.



2- د $ABCD$، په ذوزنقه کې $\overline{EF} || \overline{CD}$ او $\overline{AE} = \frac{1}{7}\overline{ED}$ $\overline{BC} = 6$ دي $\overline{BF}$ او $\overline{FC}$ پیدا کړئ.



3- د L کلی د رود یوې خواته او د بربښنا دلېږدولو پایې د رود بلې خواته دي. په شکل کې د درکړشوي فاصلې له مخې د ارتیا د سیم اوږدوالی چې کلي ته بربښنا ورسوي پیدا کړئ یعنې JL محاسبه کړئ.



د مثلثونو د ورته والي حالتونه
لومړی حالت

آیا کولای شئ د احمد او د ونې د سیورې له مخې د ونې ارتفاع پیدا کړئ؟

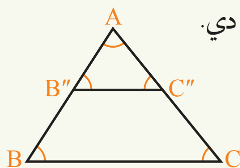


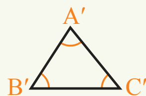
فعالیت

- د ABC او $A'B'C'$ مثلثونه داسې رسم کړئ که چېرې $\hat{A} = \hat{A}'$ او $\hat{B} = \hat{B}'$ وي.
- د $\overline{AB}$ په ضلعه باندې د B'' ټکی داسې وټاکئ چې $\overline{A'B'} = \overline{AB''}$
- د یو خط په رسم کولو سره د B'' په ټکي کې یوه زاویه جوړه کړئ چې له B' سره مساوي وي او د AC ضلع د C'' په ټکي کې قطع کړئ. آیا د $\overline{CB}$ خط $B''C''$ له خط سره موازي دی، ولې؟
- د $AB''C''$ او $A'B'C'$ مثلثونه یوله بل سره څه ډول اړیکې لري؟
- د ABC په مثلث کې $\overline{B''C''} \parallel \overline{BC}$ دی، د تالس رابطه ولیکئ.
- آیا پایله اخیستلی شئ چې $\overset{\Delta}{AB''C''} \sim \overset{\Delta}{ABC}$ ؟

په پورته فعالیت کې مو ولیدل چې د $\overset{\Delta}{ABC}$ او $\overset{\Delta}{AB''C''}$ یو بل ته ورته دي خرنګه چې $\overset{\Delta}{AB''C''} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$ نو: $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$

قضیه: که چېرې دوه مثلثونه دوې مساوي زاویې ولري مثلثونه یو بل ته ورته دي.





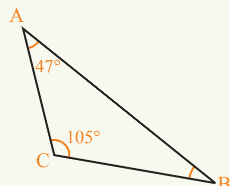
نو:

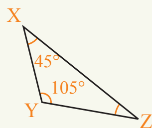
$$\left.\begin{aligned}\hat{A} &= \hat{A}' \\ \hat{B} &= \hat{B}'\end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

مثال: آیا لاندې مثلثونه یو بل ته ورته دي؟

حل: له شکل څخه لیدل کېږي چې

$\hat{A} = 47^\circ$, $\hat{X} = 45^\circ$, $\hat{C} = \hat{Y} = 105^\circ$, $\hat{B} = 28^\circ$

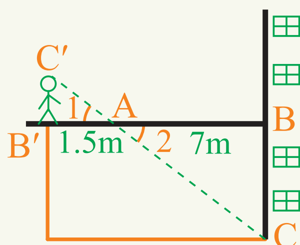




او $\hat{Z} = 30^\circ$ لیدل کېږي چې د دواړو مثلثونو زاويې يو په يو، له يو بل سره مساوي نه دي، له دې امله د $\overset{\Delta}{ABC}$ او $\overset{\Delta}{XYZ}$ مثلثونه يو له بل سره ورته مثلثونه، نه دي.

مثال: د يوه روغتون دوه مختلفي برخې د يوه هوايي پله په واسطه نښلول شوي دي.

بريالي د دې پله د جګوالي د پيدا کولو لپاره، لکه: په شکل کې د پله په پای کې درېږي او د خپل لیدلو شعاع يې د زاويې په راس باندې د لیدلو د خط او ودانۍ ترمنځ په پام کې ونيوله.



ولې د ABC او $AB'C'$ دوه مثلثونه يوبل ته ورته دي؟

په شکل کې د ټاکلو اندازو په پام کې نيولو سره که چېرې د بريالي د تنې اوږدوالی $1,8m$ وي د پله جګوالی يعنې $\overline{BC}$ په لاس راوړئ.

حل: په شکل کې لیدل کېږي چې: $\hat{B} = \hat{B}' = 90^\circ$

متقابل بالرأس دی. $\cdots \quad \hat{A}_1 = \hat{A}_2$

نو: $\hat{C} = \hat{C}'$

د مثلثونو د ورته والي له لومړي حالت څخه لیکلی شو: $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AB'C'}$

څرنګه چې مثلثونه يوبل ته ورته دي، نو د هغو د ضلعو په منځ کې تناسب موجود دی.

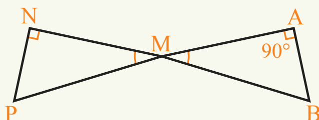
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}$$

$$\frac{\overline{BC}}{1.8m} = \frac{7m}{1.5m} \quad , \quad \overline{BC} = \frac{7m \cdot 1.8m}{1.5m} = \frac{7 \cdot 18m^2}{15m}$$

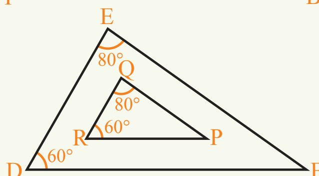
$$\overline{BC} = \frac{42}{5}m$$

$$\overline{BC} = 8.4m$$

تمرين



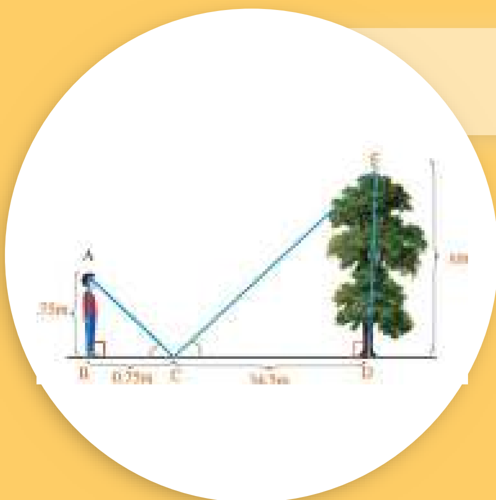
1- په مخامخ شکل کې ثبوت کړئ چې: $\overset{\Delta}{NMP} \sim \overset{\Delta}{MAB}$



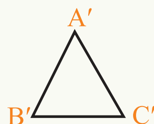
2- په مخامخ شکل کې ثبوت کړئ چې: $\overset{\Delta}{RQP} \sim \overset{\Delta}{DEF}$

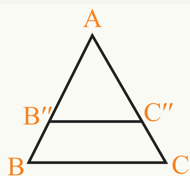
دویم حالت

خرنګه کولای شو چې د ونې جګوالی محاسبه کړو؟



فعالیت

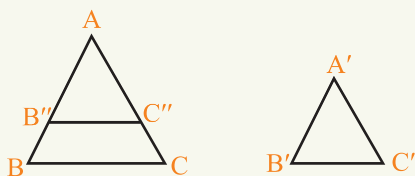




د ABC او $A'B'C'$ په دوو مثلثونو کې $\hat{A}=\hat{A'}$ او $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$ په پام کې ونیسی.

- د B'' ټکی د $\overline{AB}$ په ضلع باندې داسې وټاکئ چې $\overline{AB''}=\overline{A'B'}$ شي.
- د B'' له نقطې څخه د $\overline{BC}$ له ضلعې سره داسې یو موازي خط رسم کړئ چې د $\overline{AC}$ ضلع قطع کړي او د تقاطع ټکی یې په C'' سره وښیاست.
- د ABC په مثلث کې د تالس قضیه ولیکئ.
- د $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$ په تناسب کې د $\overline{A'B'}$ او $A'C'$ پر ځای د هغه مساوي قیمتونه ولیکئ.
- د $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$ او $\frac{AB}{AB''}=\frac{AC}{AC''}$ له تناسبو څخه څه ډول اړیکه په لاس راوړلای شئ؟
- آیا د $A'B'C'$ او $AB''C''$ دوه مثلثونه یوله بل سره انطباق منونکي دي؟ ولې؟
- د $\overset{\Delta}{ABC}$ او $A\overset{\Delta}{B''}C''$ دوه مثلثونه یو له بل سره څه اړیکه لري؟ ولې؟
- آیا کولای شئ له $\overset{\Delta}{ABC}$ او $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ څخه د ورته والي نتیجه په لاس راوړئ؟

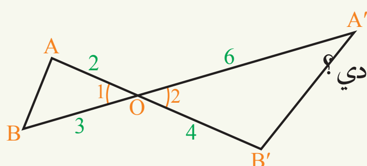
په پورته فعالیت کې مو ولیدل چې $A\overset{\Delta}{B''}C''\cong A'\overset{\Delta}{B'}C'$ او $\overset{\Delta}{ABC}\sim A\overset{\Delta}{B''}C''$ دي.
نو کولای شو دې پایلې ته ورسېږو چې $\overset{\Delta}{ABC}\sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$ دی.



قضيه: که چېرې د يوه مثلث دوه ضلعې د بل مثلث له دوو ضلعو سره متناسبې او په دواړو مثلثونو کې، د دې دوو ضلعو په منځ کې زاويې انطباق منونکې وي، مثلثونه يو بل ته ورته دي.

که چېرې $\hat{A} = \hat{A}'$ او $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ وي.

نو: $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$



مثال: آيا د $O\overset{\Delta}{A}B$ او $O\overset{\Delta}{A'}B'$ مثلثونه يوبل ته ورته دي؟

حل: څرنګه چې

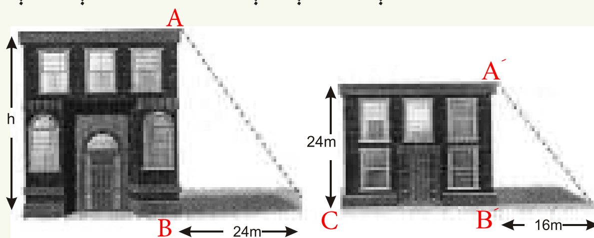
متقابل بالراس: .... $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA'}} = \frac{1}{2}$$

څرنګه چې د مثلثونو دوه ضلعې يوله بل سره متناسبې او د ضلعو په منځ کې زاويې مساوي دي.

نو: $O\overset{\Delta}{A}B \sim O\overset{\Delta}{A'}B'$

مثال: د يوې ودانۍ د سيورې اوږدوالی 16m دی. په داسې حال کې چې له هغه څخه د بلې ځګې ودانۍ د سيورې اوږدوالی 24m دی د ځګې ودانۍ جګوالی په داسې حال کې پيدا کړئ چې د کوچنۍ ودانۍ جګوالی 24m وي.

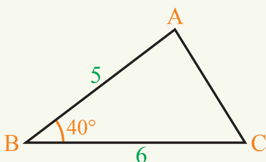


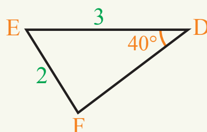
حل: که چېرې د سيورې په پای کې ودرېږو او د جګوالې وروستۍ ټکې ته وګورو نو دوه ورته مثلثونه جوړېږي. د ABC او A′B′C′ د ورته مثلثونو ضلعو د تناسب څخه ليکلی شو چې:

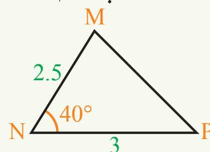
$$\frac{h}{24m} = \frac{24m}{16m} \Rightarrow h = \frac{24m \cdot 24m}{16m} = 36m$$

تمرين

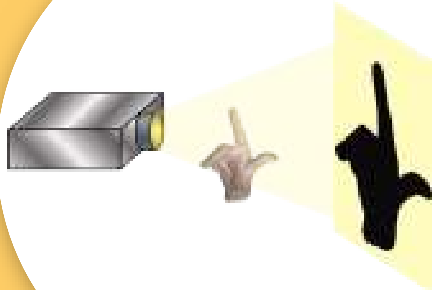
1- په لاندې شکلونو کې کوم دوه مثلثونه يو بل ته ورته دي؟







دريم حالت



که چېرې د ګوتې اوږدوالی $5cm$ وي د ګوتې تصوير څومره اوږدوالی لري؟

فعاليت

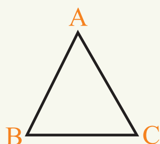
- د ABC مثلث داسې رسم کړئ چې $\overline{BC}=12$ ، $\overline{AC}=9$ او $\overline{AB}=6$ وي وروسته له هغه يې زاويې اندازه کړئ.
- د MNP مثلث داسې رسم کړئ چې $\overline{NP}=4$ ، $\overline{MP}=3$ او $\overline{MN}=2$ وي د نوموړي مثلث د زاويو اندازه پيدا کړئ.
- د پورته قيمتونو په پام کې نيولو سره لاندې جدول بشپړ کړئ:

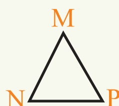
په

مثلث	ضلعې	زاويې
$\overset{\Delta}{ABC}$	$\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=9$, $\overline{BC}=12$	$\hat{A}=?$, $\hat{B}=?$, $\hat{C}=?$
$\overset{\Delta}{MNP}$	$\overline{MN}=2$, $\overline{MP}=3$, $\overline{NP}=4$	$\hat{M}=?$, $\hat{N}=?$, $\hat{P}=?$
د ضلعو تر منځ نسبت	$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}}=?$, $\frac{\overline{BC}}{\overline{NP}}=?$, $\frac{\overline{AC}}{\overline{MP}}=?$	

پورته فعاليت کې مو وليدل چې د مثلثونو د ضلعو په منځ کې نسبت شته او همدارنګه د دواړو مثلثونو زاويې يو له بل سره مساوي دي.

نو له دې امله $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{MNP}$

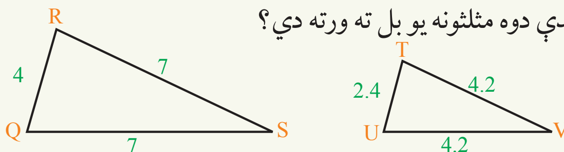




قضيه: که چېرې د يوه مثلث درې ضلعې د بل مثلث له درېو ضلعو سره متناسبې وي دا دوه مثلثونه ورته مثلثونه دي.

مثال: آیا لاندي دوه مثلثونه یو بل ته ورته دي؟

حل:



$$\frac{\overline{QR}}{\overline{UT}}=\frac{4}{2.4}=\frac{5}{3}$$

$$\frac{\overline{RS}}{\overline{TV}}=\frac{7}{4.2}=\frac{5}{3}$$

$$\frac{\overline{QS}}{\overline{UV}}=\frac{7}{4.2}=\frac{5}{3}$$

نو: د $\overset{\Delta}{RQS}\sim\overset{\Delta}{TUV}$ دي.

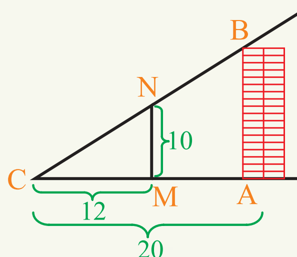
مثال: د برج جګوالي $(\overline{AB})$ د هغه د سیورې $(\overline{AC})$ له مخې وټاکئ.

حل: د دې کار لپاره یوه ستن (میله) د ځمکې په سطحې باندې په عمودي توګه داسې دروو چې پورته سر يې يعني د N ټکی د B او C له ټکو سره په یوه مستقیم خط باندې راشي.

خرنګه چې: $\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{CMN}$ دي، نو:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{MC}}$$

په پورته رابطه کې د $\overline{MN}$, $\overline{MC}$ او $\overline{AC}$ اوږدوالي معلوم دي. کولای شو د پورته رابطې په مرسته د $\overline{AB}$ اوږدوالی چې د برج جګوالي دی په لاندې توګه پیدا کړو. د $\overset{\Delta}{CMN}$ او $\overset{\Delta}{CAB}$ په ورته مثلثونو کې لرو:



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{MC}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{10}=\frac{20}{12}$$

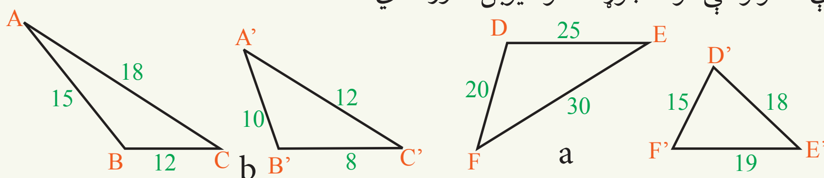
$$12\overline{AB}=20\cdot 10$$

$$\overline{AB}=\frac{200}{12}$$

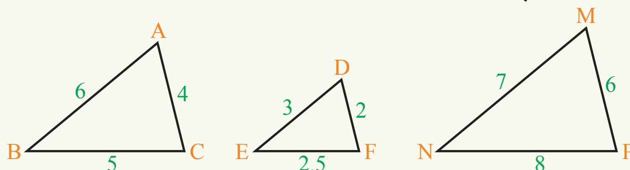
$$\overline{AB}=16.6$$

تمرین

1- په لاندې مثلثونو کې کومه جوړه مثلثونه یوبل ته ورته دي؟



2- په لاندې شکلونو کې وښیاست چې کوم دوه مثلثونه یو بل ته ورته دي؟



ددریم فصل مهم ټکي:

1-ورته شکلونه له هغه شکلونو څخه عبارت دي چې هم شکله وي، خو ضرور نه ده چې اندازې یې یو له بله سره مساوي وي.

2- مضلع ګانې هغه وخت یو بل ته ورته وې چې لاندې خواص ولري:

a) په ورته مضلع ګانو کې ټولې زاویې باید یو په یو سره انطباق منونکې وي.

b) د مضلع ګانو د زاویومخامخ اړوندې ضلعې یوله بل سره متناسبې وي.

3- که چېرې په مساوي فاصلو سره موازې خطونه یو قاطع، پرې کړي د هغو پر مخ باندې په مساوي اندازو سره ټوټې خطونه جلا کوي.

4- په مساوي فاصلو سره د موازي خطونو په کارولو سره کولای شو یو ټوټه خط پر مساوي ټوټه خطونو باندې وویشو.

5- که چېرې موازي خطونه دوه قاطع، پرې کړي او د یوه قاطع پر مخ باندې مساوي ټوټې جلاکړي. د بل پر مخ باندې هم مساوي ټوټې جلا کوي.

6- د تالس قضیه په مثلث کې: که چېرې یو خط د مثلث د یوې ضلعې له یوه ټکي څخه یو موازي خط د مثلث له بلې ضلعې سره رسم شي، دا دوه متقاطع ضلعې متناسبا وېشي.

7- د تالس د قضیې عکس: که چېرې یو خط د مثلث دوه ضلعې متنا سبا قطع کړي یعنې یو تناسب جوړ کړي، نو دا خط له درېمې ضلعې سره موازي دی.

8- دوو مثلثونو ته هغه وخت ورته مثلثونه وایو چې ټولې زاویې یې یو په یو انطباق منونکې او یا ضلعې یې یوله بل سره متناسبې وي یعنې که چېرې له دې دوو خاصیتو نوڅخه یویې په مثلثونو کې سم وي مثلثونه یو بل ته ورته دي.

9- مثلثونه په درېو حالتونو کې یو بل ته ورته دي:

a) **لومړی حالت**: که چېرې د یوه مثلث دوه زاویې د بل مثلث له دوو زاویو سره مساوي وي، مثلثونه ورته دي.

b) **دویم حالت**: که چېرې د یوه مثلث دوه ضلعې د بل مثلث له دووضلعوسره متناسب اود ضلعو په منځ کې زاویې یې مساوي وي مثلثونه یو بل ته ورته دي

c) **دریم حالت**: که چېرې د یوه مثلث درې ضلعې د بل مثلث له دریو ضلعو سره متناسبې وي، نو دا دوه مثلثونه یو بل ته ورته دي.

عمومي پوښتني

• لا ندي پوښتني په ځير سره ولولئ د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه درکړ شوي دي. سم ځواب يې وټاکئ او کرښه تري تاوه کړئ.

1- يو متساوي الاضلاع مثلث ورته دی:

a) مختلف الاضلاع مثلث ته b) متساوي الاضلاع مثلث ته

c) متساوي الساقين مثلث ته d) يوه ته هم نه دی

2- ټولې متساوي الزاويې څلور ضلعي ګاني يو بل ته:

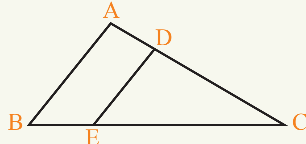
a) ورته دي b) انطباق منونکی دي c) متوازي الاضلاع دي d) يو يې هم نه دي

3- د ABC او DEF مثلثونه يو بل ته ورته دي. که چېرې $\hat{A}=\hat{D}, \hat{B}=\hat{E}$ او، $\overline{AC}=12cm$, $\overline{AB}=9cm$ او $\overline{DE}=3cm$ وي، په دې صورت کې د $\overline{DF}$ اوږدوالی عبارت دي له:

a) 3cm b) 4cm

c) 6 cm d) 7cm

4- په لاندې شکل کې $\overline{AB}//\overline{ED}$ او $\frac{5}{2}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$ دي د $\frac{\overline{CE}}{\overline{EB}}$ نسبت عبارت دی له:



a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{1}{2}$

5- د ABC مثلث د ضلعو اندازه 8، 12او 16 سانتي متره دي. دا مثلث لاندې کوم يوه مثلث ته ورته دی؟ د ضلعو اندازې يې په لاندې توګه درکړ شوي دي.

a) هغه مثلث چې ضلعې يې 6 ، 9 او 12 سانتي متره وي.

b) هغه مثلث چې ضلعې يې 12، 8 او6 سانتي متره وي.

c) هغه مثلث چې ضلعې يې 8، 9 او 12 سانتي متره وي.

d) هغه مثلث چې ضلعې يې 16 ، 10او 12 سانتي متره وي.

• لاندې جملې په پام سره ولولئ، سمې پوښتني ته د (ص) توری او ناسمې پوښتني ته د (غ) توری وليکئ.

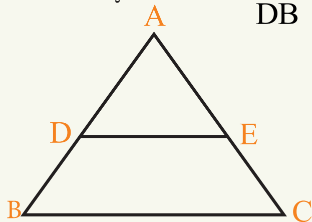
1- ( ) دوه قايم الزاويه مثلثونه په هغه صورت کې يوبل ته ورته دي چې د وترونو اوږد والې يې سره مساوي وي.

2- ( ) ټول مستطيلونه يو بل ته ورته دي.

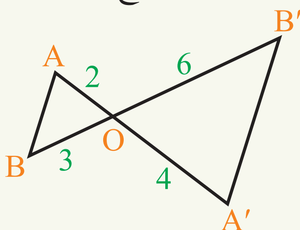
3- (   ) که چېرې د یوه مثلث دوه ضلعې او د منځ زاویه یې د بل مثلث له دووضلعو او د منځ له زاویې سره ا نطباق منونکی وي نومړي مثلثونه یو بل ته ورته دي.
4- (   ) که چېرې د یوه مثلث درې ضلعې د بل مثلث له دریو ضلعوسره متنا سب وي نومړي مثلثونه یو بل ته ورته دي.
5- (   ) ټول ورته مثلثونه انطبا ق منونکي دي.
6- (   ) ټول قایم الزاویه مثلثونه یو بل ته ورته دي.
7- (   ) که چېرې یو خط د مثلث له یوې ضلعې سره موازي وي، نو له دوو نورو ضلعوسره مساوي دی.

• لاندې جملې په پوره پام سره ولولئ او تشې ځایونه په مناسبو کلمو سره ډک کړئ:
1-که چېرې یو خط د مثلث دوه ضلعې متناسباً وویشی نو دا خط مثلث له دریمې ضلعې سره .... دئ.
2- که چېرې په مساوي فاصلو سره موازي خطونه څو ټوټه خطونه قطع کړي، د هغو په مخ باندې....... جلا کوي.
3- دوه مثلثونه هغه وخت یوبل ته ورته دي چې د یوه مثلث.......... د بل ....انطباق منونکي وي.
4- ورته مضلعات............ ضلعو لرونکې او زاویې.......................... وي.

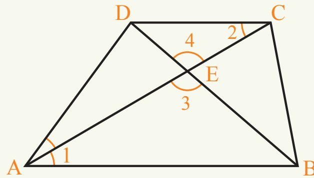
• لاندې پوښتنې حل کړئ.
1- په لاندې شکل کې D د $\overline{AB}$ منځنۍ ټکی دی د $\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$ نسبت پیدا کړئ.



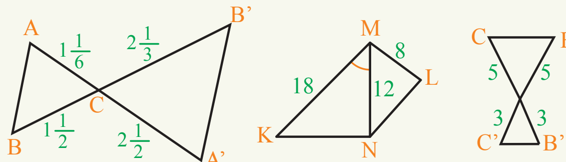
2- د OAB , $O'A'B'$ دوه مثلثونه ولې یو بل ته ورته دي؟ دهغو دضلعو تر منځ تناسب ولیکي او مساوي زاویې یې وټاکی.



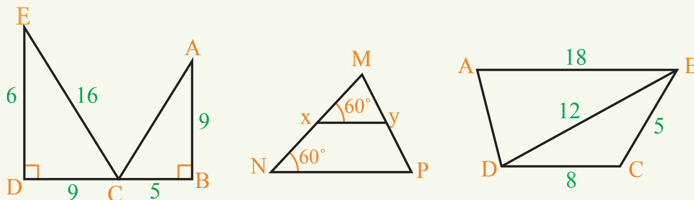
3- په لاندې ذ وذنقه کې ثبوت کړئ چې د $\overset{\Delta}{ABE}$ او $\overset{\Delta}{ECD}$ مثلثونه يو بل ته ورته دي.



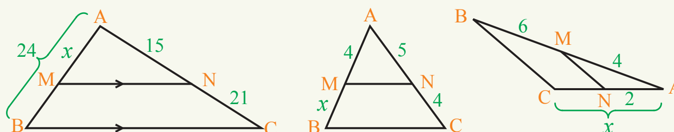
4- په لاندې مثلثونو کې د دوومثلثونو کومه جوړه يو بل ته ورته دي.



5- په هر شکل کې په مثلثونو باندې غور وکړئ وبې ټاکی چې کومه جوړه مثلثونه د ورته والی په کوم حالت کې يو بل ته ورته دي.



6- په لاندې ورته شکلونو کې $\overline{BC} \,//\, \overline{MN}$ دي د تالس د قضيې په کارولو سره x پيدا کړئ.



فصل ثلوم

تناظر





د تناظر مفهوم



آیا تر اوسه مو فکر کړی دی چې خومره متناظر شکلونه زموږ په چاپېریال او طبیعت کې شته دي؟

فعالیت

لاندې شکلونو ته پاملرنه وکړئ:

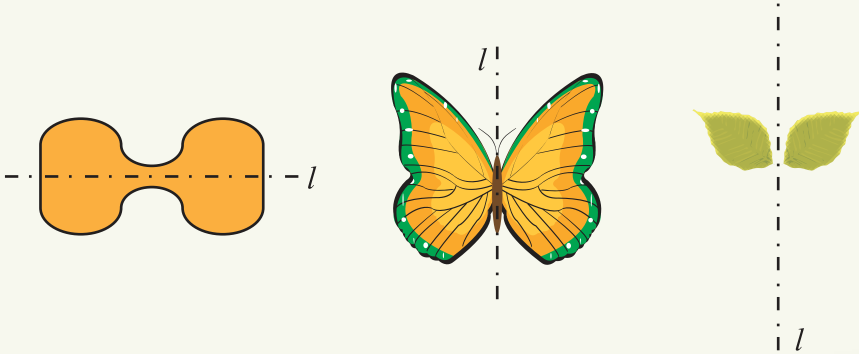


- که چېرې پورتني شکلونه د l د خط په امتداد سره قات کړو څه شئ لیدل کېږي؟
- آیا ویلای شو چې د شکل دوه برخې چې د l خط دواړه خواوته دي انطباق منونکي دي؟
- آیا کولای شو د پورتنیو شکلونو پر مخ داسې یو خط رسم کړو؟ که چېرې شکل د رسم شوي خط په امتداد قات کړو، د شکل دوې برخې یو په بل باندې منطبق شي؟

له پورتني فعالیت څخه لیدل کېږي چې ځینې شکلونه دا خاصیت لري که چېرې هغه د یو خط په امتداد سره قات کړو، نو د شکل دواړه برخې یو پر بل باندې منطبق کېږي.
دلته وایو چې شکل نسبت خط ته متناظر دی.

که چېرې یو شکل د خط په امتداد سره قات شي او دواړه برخې یې یو پر بل باندې منطبق شي، دې ډول شکلونو ته متناظر شکلونه نسبت مستقیم خط ته وایي او هغه خط چې شکل په هغه باندې قات شوی دی د تناظر محور بلل کېږي.

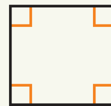
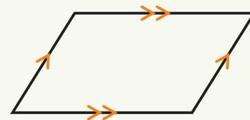
مثال: لاندې شکلونه نسبت د l خط (د تناظر محور) ته متناظر دي:

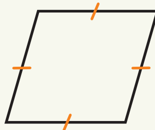
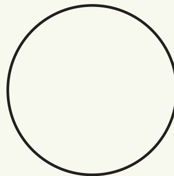
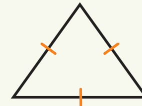


تمرین

په لاندې هر یوه شکل کې د تناظر محور د شتوالي په صورت کې رسم کړئ او ووایاست چې هر یو شکل د تناظر څو محوره لري او همدارنګه لاندې جدول بشپړ کړئ.

شکل	مستطیل	مربع	متوازي الاضلاع	لوزي	دایره	متساوي الاضلاع مثلثونه
د تناظر د محورونو شمېر						

محوري تناظر



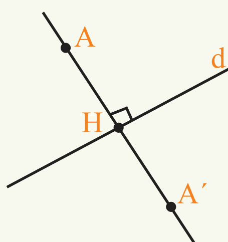
د طبیعت ډېر موجودات متناظر حالت لري.
آیا کولای شئ په طبیعت کې د متناظرو شکلونو نومونه واخلئ؟

فعالیت

A• d

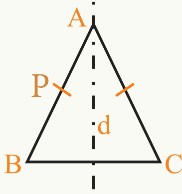
- د d خط او د هغه څخه د باندې د A یو ټکی په پا م کې ونیسئ:
- د A له ټکي څخه د d پر خط باندې عمودي خط رسم کړئ.
- د هغو د تقاطع ټکي ته H وواياست.
- $\overline{AH}$ په خپله اندازې اوږد کړئ چې د A' ټکی لاس ته راشي.
- آیا $\overline{AH} = \overline{A'H}$ دی. ولې؟
- آیا $A'H \perp d$ دی. ولې؟
- آیا دې پایلې ته رسېږو چې d د $\overline{AA'}$ عمودي ناصف دی؟

تعریف



د A' ټکي د A ټکي متناظر نسبت د d خط ته بولي. که چېرې د d خط عمودي ناصف د هغه ټوټه خط وي چې A او A' يې سره نښلولي دي، لکه: مخامخ شکل.
د هر هندسي شکل محوري تناظر له هغه شکل څخه عبارت دی چې هره نقطه يې نسبت د لومړي شکل یوې نقطې ته متناظره وي.

فعالیت



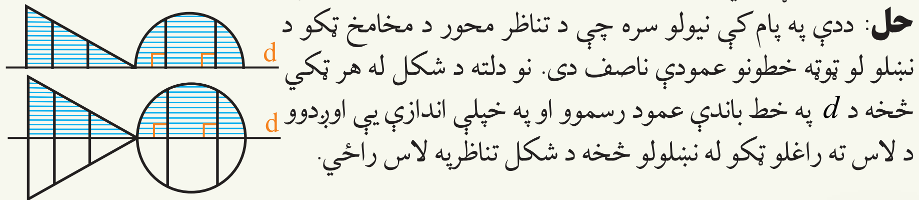
- د ABC په متساوي الساقین مثلث کې د d خط د $\overline{BC}$ د قاعدې عمودي ناصف دی.
- که چیرې نوموړی مثلث د d پر خط باندې قات کړو.
آیا د مثلث دواړه برخې یو پر بل باندې منطبق کېږي؟
- د $\overline{AB}$ پر ضلعې باندې د P یو ټکی وټاکئ.
- د P له ټکي څخه پر d باندې عمود رسم کړئ او د تقاطع ټکي ته H ووایاست. امتداد ورکړئ تر څو $\overline{AC}$ په P' کې قطع کړي.
- آیا کولای شئ نتیجه واخلئ چې $\overline{PH}=\overline{P'H}$ دئ؟ ولې؟
- آیا کولای شئ نتیجه واخلئ چې د d خط د $\overline{PP'}$ د ټوټه خط عمودي ناصف دی؟ ولې؟
- د Q یو بل ټکی د $\overline{AC}$ د ضلعې په مخ باندې وټاکئ او پورتنی مرحلې تکرار کړئ.

له پورته فعالیت څخه لیدل کېږي چې د $\overline{AB}$ د ضلعې د هر ټکي تناظر نسبت د d تناظري محور ته د $\overline{AC}$ په ضلعې باندې دی.

که چیرې یو شکل نسبت یوه خط ته متناظر وي د هغه شکل تناظري محور د هغو ټوټه خطونو عمودي ناصف دی چې د شکل مخامخ ټکي یو له بل سره نښلوي.

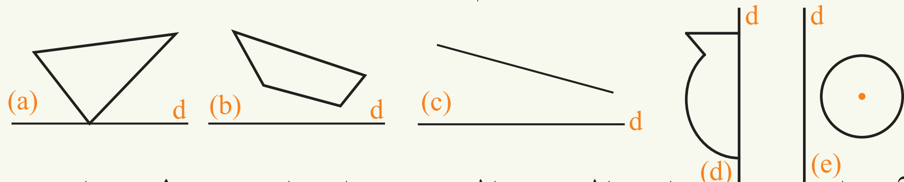
مثال: د درکړ شوي شکل متناظر نسبت د d خط ته په لاس راوړئ.

حل: ددې په پام کې نیولو سره چې د تناظر محور د مخامخ ټکو د نښلو لو ټوټه خطونو عمودي ناصف دی. نو دلته د شکل له هر ټکي څخه د d په خط باندې عمود رسموو او په خپلې اندازې یې اوږدوو د لاس ته راغلو ټکو له نښلولو څخه د شکل تناظریه لاس راځي.



تمرین

1- د هر شکل متناظر نسبت د d خط ته رسم کړئ.

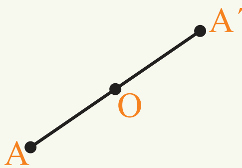


2–وښیا ست چې د یوې زاویې تناظر نسبت تناظري محور ته داسې زاویه ده چې د لومړی زاویې سره مساوي او مختلف الجهت ده.

مرکزي تناظر



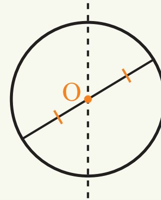
آیا په خرخ کې تناظر لیدلای شی؟

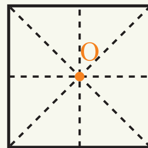


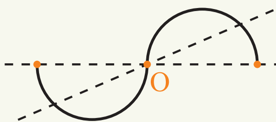
د A' ټکی د A د ټکي متناظر نسبت د O ټکي ته بولي که چېرې O د $\overline{AA'}$ د ټوټه خط منځنی ټکی وي. په دې حالت کې O ته مرکزي تناظر وایي او وایو A او A' نسبت د O ټکی ته متناظر دي.

همدا رنګه که چېرې S د ټکو یو سټ او O یو ټکی وي او هم د S د هر ټکي متناظر نسبت O ته د S پر مخ باندې وي، نو وایو S نسبت O ته متناظر دی. په دې حالت کې O د S مرکزي تناظر دی او S مرکزي تناظر لري.

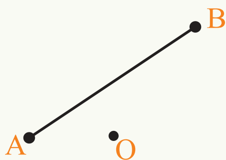
مثال: لاندې شکلونه نسبت د O ټکي ته متناظر دي:







فعالیت

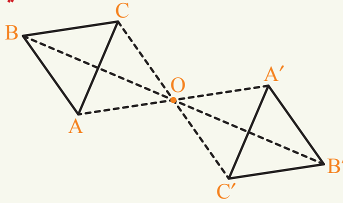


- د AB ټوټه خط او د O ټکی په پام کې ونیسئ.
- د A ټکی له O سره ونښلوئ او په خپل یعنې د $\overline{OA}$ په اندازه سره یې اوږد کړئ او پای ته یې A' ووایا ست.
- آیا د A' ټکی د A د ټکي متناظر نسبت د O ټکي ته دی؟
- د B ټکی له O سره ونښلوئ او د $\overline{OB}$ په اندازه سره یې اوږد کړئ

او پای ته يې B' وواياست.

- آيا B' د B د ټکي متناظر نسبت O ته دی؟
- د خط کش په واسطه د A' او B' ټکي له يو بل سره ونښلوئ.
- په خپله خوښه د P ټکی د $\overline{AB}$ د ټوټه خط پر مخ وټاکئ.
- د Pټکی له O سره ونښلوئ او په خپله اندازه يې اوږد کړئ پای ته يې P' وواياست.
- آيا P' د $\overline{A'B'}$ پر مخ باندې راځي.
- آيا د $\overline{A'B'}$ ټوټه خط د $\overline{AB}$ ټوټه خط متناظر نسبت O ته دی؟

د يوه شکل د تناظر پيداکولو لپاره نسبت د O يوه ټکي ته بايد د شکل هر ټکی له O سره ونښلوو او په خپل اندازه سره امتداد ورکړو. هغه شکل چې د لاس ته راغلو ټکو له نښلولو څخه لاس ته راځي د اصل يا لومړنی شکل متناظر د O ټکي ته دی.

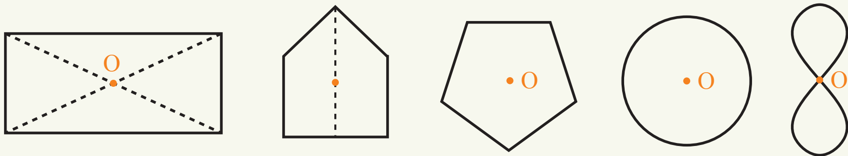


مثال: په مخامخ شکل کې د $A'B'C'$ مثلث د ABC د مثلث متناظر نسبت د O ټکی ته دی.

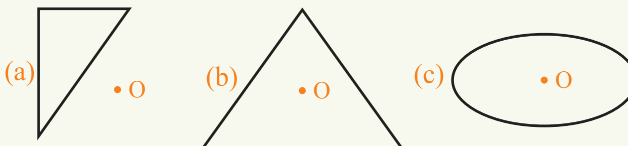
پوښتنه: د ABC زاويې متناظره زاويه نسبت د O ټکي ته په لاس راوړئ؟

تمرين

1- په لاندې کوم يوه شکل کې د O ټکی د تناظر مرکز دی؟



2- د لاندې شکلونو متناظر نسبت د O ټکي ته رسم کړئ:



د څلورم فصل مهم ټکي

• د تناظر او تناظري محور مفهوم

که چېرې د يو خط په امتداد سره يو شکل داسې قات کړو چې د شکل دوه برخې يو پر بل باندې منطبقې شي، دې شکل ته متناظر شکل نسبت خط ته وايې او هغه خط چې شکل يې پر مخ باندې قاتيږي د شکل تناظري محور بلل کيږي.

• محوري تناظر

د A' ټکی د A د ټکي متناظر نسبت د d خط ته وايو که چېرې د d خط د A او A' تر منځ د ټوټې خط عمودې نا صف وي.

• که چېرې د A ټکی د d د خط پر مخ باندې وي، متناظر يې نسبت د d خط ته په خپله همغه ټکی دی.

• که چېرې يو شکل نسبت يوه خط ته متناظر وي د شکل تناظري محور د هغه ټوټه خطونو عمودې ناصف دی چې د شکل پر مخ د متناظر نښلوونکو ټکو په منځ کې دی.

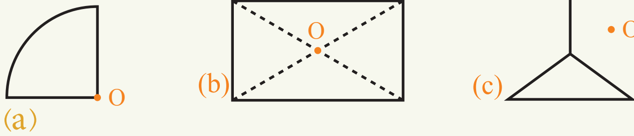
• مرکزي تناظر

که چېرې S د ټکو يو سيټ او (O) يو ټکی وي. د S د هر ټکي متناظر نسبت (O) ته په خپله د S پر مخ باندې دی نو وايو S نسبت د (O) ټکي ته متناظر دی. په دې صورت کې (O) د S تناظري مرکز دی او S مرکزي تناظر لري.

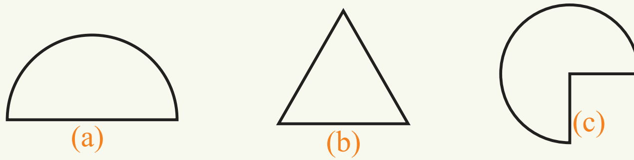
عمومي پوښتنې:

لاندې پوښتنې حل کړئ:

1- د لاندې هر شکل متناظر نسبت د O ټکي ته رسم کړئ.



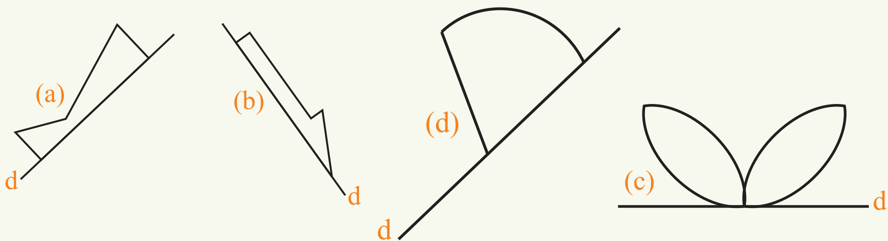
2- د هر شکل تناظرې محور رسم کړئ:



3- هغه شکلونه وټاکئ چې مرکزي تناظر لري او بیا د هر شکل پر مخ باندې مرکزي تناظر وښیاست:



4- د هرشکل متنا ظر نسبت د d خط ته پیداکړئ:



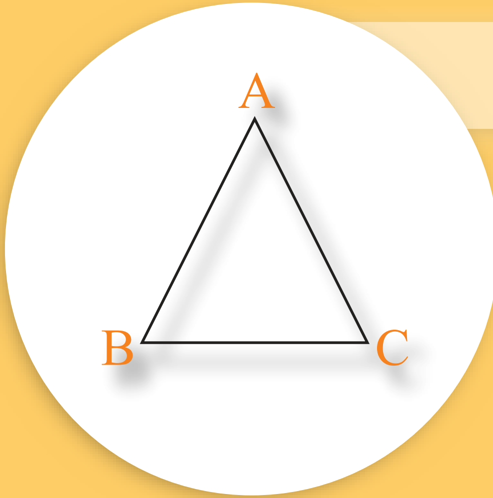
5- په دووشکلونو کې وښیا ست که چېرې یو شکل د تناظر دوه محوره ولري د هغو د تقاطع ټکی د شکل مرکزي تناظر دی.

پنځم فصل

د مثلث قضیې



د متساوي الساقين د مثلث قضيې



د ABC د مثلث ضلعې اندازه کړئ.
دا مثلث څه ډول مثلث بلل کېږي؟
ددې مثلث د زاویو ترمنځ څه ډول اړیکې شته؟

فعالیت

- د ABC مثلث داسې رسم کړئ چې د هغه $\overline{AB} = \overline{AC}$ وي.
- د ABC په مثلث کې مساوي ضلعې په څه نامه یادېږي؟

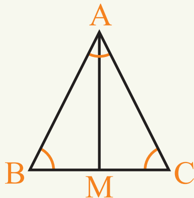
د مساوي ضلعو مخامخ زاویې د نقالې په مرسته اندازه کړئ. ددې دوو زاویو ترمنځ څه ډول اړیکې لیدلای شئ؟

- د ABC مثلث د څه په نوم یادېږي.
- یو بل متساوي الساقین مثلث رسم کړئ، پورتنۍ عملیه وربانديې تکرار کړئ او وواياست څه ډول پایله لاس ته راځي؟

له پورتني فعالیت څخه لیدل کېږي چې په متساوي الساقین مثلث کې د مساوي اضلاعو مخامخ زاویې یو له بل سره مساوي دي چې دا مفهوم د لاندې قضیې په توګه لولو.

قضیه: که چېرې د یوه مثلث دوه ضلعې یو له بل سره مساوي وي د هغو دوو ضلعو مخامخ زاویې هم یو له بل سره مساوي دي.

ثبوت: فرض کړئ چې $\overline{AB} = \overline{AC}$ دی. د $\overline{BC}$ د ضلعې منځنۍ ټکي ته M وایو. د $\overline{AM}$ میانه رسموو.



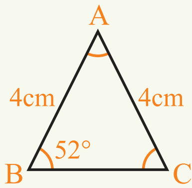
د ABM او ACM د دوو مثلثونو له مخې لرو:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} = \overline{AC} \\ \overline{BM} = \overline{CM} \\ \overline{AM} = \overline{AM}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABM} = \overset{\Delta}{AMC}$$

د فرضیې له مخې
(M د BC منځنی ټکی دی)
ګډه ضلع (مشترکه)

د دریو مساوي ضلعو له مخې داسې پایله لاس ته راوړو چې د ABM او AMC مثلثونه انطباق منونکي دي. له دې امله د هغو ټولې زاویې هم یو په یو سره مساوي دي.

په پایله کې: $\hat{B}=\hat{C}$



لومړی مثال: که چیرې د ABC په مثلث کې $\overline{AB}=\overline{AC}=4cm$ او $\hat{B}=52^\circ$ وي. د C خو درجې ده؟

حل: څرنګه چې $\overline{AB}=\overline{AC}$ ده، په نتیجه کې $\hat{B}=\hat{C}$

نو: $\hat{C}=52^\circ$ ده.

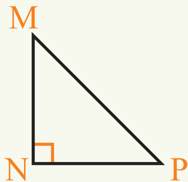
دویم مثال: په قایم الزاویه متساوي الساقین مثلث کې د هغه دوو ضلعو مخامخ زاویې څو درجې دي؟

حل: د MNP په مثلث کې د N زاویه قایمه ده.

څرنګه چې $\overline{MN}=\overline{NP}$ ده. د پورتنۍ قضیې په پام کې نیولو سره د نوموړي مثلث دوه مخامخ زاویې یو له بل سره مساوي دي یعنې $\hat{M}=\hat{P}$

پوهیږو چې د مثلث د داخلي زاویو مجموعه 180° دي او $\hat{N}=90^\circ$

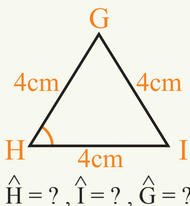
په نتیجه کې:



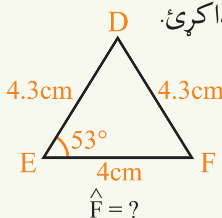
$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}+\hat{P}=90^\circ\\ \hat{M}=\hat{P}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{M}=\hat{P}=90^\circ\div 2=45^\circ$$

تمرین

1- په لاندې شکلونو کې نامعلومې زاویې پیدا کړئ.

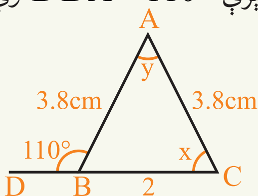


$\hat{H}=?\ ,\ \hat{I}=?\ ,\ \hat{G}=?$



$\hat{F}=?$

2- په لاندې شکل کې د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث متساوي الساقین دی که چیرې $D\hat{B}A=110^\circ$ وي د x او y زاویې پیدا کړئ.



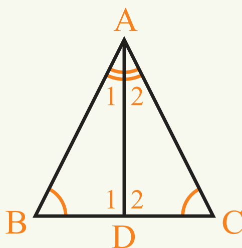
فعالیت

- د ABC مثلث داسې رسم کړئ چې په هغه کې $\hat{B} = \hat{C}$ وي.
- د خط کش په کارولو سره د ABC د مثلث د ضلعو اوږدوالی اندازه کړئ.
- ددې مثلث د ضلعو د اوږدوالي تر منځ څه ډول اړیکې لیدل کېږي؟
- یو بل مثلث چې دوه زاویې یې سره مساوي وي، رسم کړئ او پورتنی عمل وربانديې تکرار کړئ

له پورته فعالیت څخه لیدل کېږي، هغه مثلث چې دوه مساوي زاویې ولري د مساوي زاویو مخامخ ضلعې یې هم یو له بل سره مساوي دي. دا مطلب د قضیې په توګه په لاندې ډول بیانوو:

قضیه: که چېرې د یوه مثلث دوه زاویې یو له بل سره مساوي وي د نومورو زاویو مخامخ ضلعې هم یو له بله سره مساوي دي.

ثبوت: د ABC مثلث په پام کې نیسو داسې چې $\hat{B} = \hat{C}$ ده، د $\hat{A}$ زاویې ناصف الزاویه رسموو او هغه ته $\overline{DA}$ وایو.



د ABD او ACD په دوو مثلثونو کې لرو:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{B} = \hat{C}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 90^\circ$$ (ولې؟)

اوس د ABD او ACD په دوو مثلثونو کې لرو:

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ، AD ناصف الزاویه دی

$\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ ، قایمه دي

$\overline{AD} = \overline{AD}$ ، ګډه ضلع ده

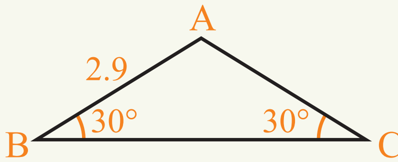
$$\Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{ACD}$$

د مثلث د دوو زاویو او د هغوی ترمنځ د ضلعو د مساوي والي په پام کې نیولو سره د ABD او ACD مثلثونه انطباق منونکي دي. له دې امله د هغوی متناسبې ضلعې یو له بله سره مساوي دي.

یعنې: $\overline{AB} = \overline{AC}$

مثال: په لاندې شکل کې $\hat{B}=\hat{C}=30^\circ$ ، $\overline{AB}=2.9cm$ دي د $\overline{AC}$ ضلع معلومه کړئ.

حل:



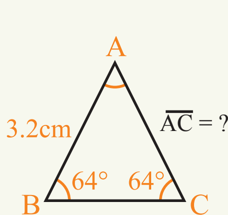
څرنګه چې: $\hat{B}=\hat{C}$ ده، نو نوموړی مثلث متساوي الساقين دی.

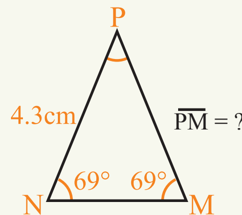
د مخکنی قضيې له مخې چې د يوه مثلث د مساوي زاويو مخامخ ضلعې سره مساوي دي، نو:

$$\overline{AB}=\overline{AC}=2.9cm$$

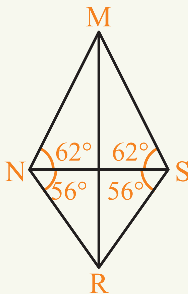
تمرین

1- په لاندې شکلونو کې نامعلومې ضلعې پيدا کړئ.





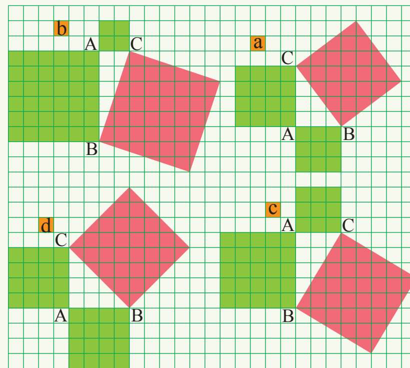
2- د زاويو د اندازې له مخې په لاندې شکل کې وښاياست چې د MNR او MSR دوه انطباق منونکي مثلثونه دي.



د فیثاغورث قضیه
Pythagorean theorem



فیثاغورث یو نامتو ریاضي پوه او د پخواني یونان فیلسوف و چې له میلاد څخه 530 کاله مخکې يې ژوند کاوه.

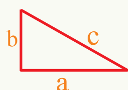


په پورته شکلونو کې لیدل کېږي چې د ABC مثلث د A په راس کې قایم الزاویه دی. د هغو مربع گانو مساحت چې د ABC د مثلث د ضلعو په واسطه جوړې شوي دي. د کوچنیو مربع گانو د شمېر په شمېرلو سره د هغو مساحت تخمین کړئ، لکه: په لاندې جدول کې لیکل شوي دي. د c, b او d جزونه بشپړ کړئ:

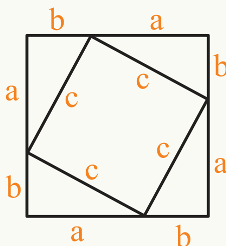
	د هغو مربع گانو شمېر چې د $\overline{AB}$ په ضلعې باندې دي	د هغو مربع گانو شمېر چې د $\overline{AC}$ په وتر باندې دي	د هغو مربع گانو مجموعه چې د $\overline{AB}$ او $\overline{AC}$ په ضلعو باندې دي	د هغو مربع گانو شمېر چې د $\overline{BC}$ په وتر باندې دي
a	9	16	25	25
b				40
c				34
d				32

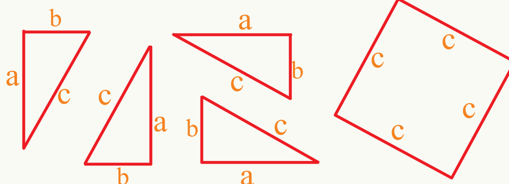
په جدول کې د لیکل شوو عددونو له مخې د قایم الزاویه مثلثونو د ضلعو په واسطه د جوړو شوو مربع گانو د مساحت په منځ کې څه ډول رابطه لیدلای شئ؟

فعالیت



- د b, a او c ضلعو په اوږدوالي قايم الزاويه مثلث رسم کړئ او هغه بياتي کړئ.
- دي مثلث باندې درې نور انطباق منونکي مثلثونه له کاغذ څخه جوړ کړئ.
- د c د وتر په اوږدوالي سره يوه مربع له کاغذ څخه جوړه کړئ.
- له لاندې شکل سره سم څلور جوړ شوي مثلثونه او مربع ګانې د يو بل ترځنګ داسې کېږدئ چې يوه مربع د $a+b$ ضلعې په اوږدوالي سره جوړه شي.



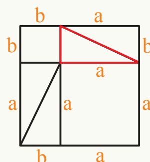


د شکل له مخې آيا لاندې مساوات سم دي؟

د هغې مربع مساحت چې ضلعې يې c وي + د 4 انطباق منونکي قايم الزاويه مثلثونو مساحت = د مربع مساحت د (a+b) په ضلعې سره

- بيا د b, a په اوږدوالي څلور انطباق منونکي قايم الزاويه مثلثونه او دوه مربع ګانې چې د ضلعو اوږدوالی يې د مثلث د قايمو ضلعو سره مساوي يعنې a او b وي، جوړ کړئ.
- دا څلور مثلثونه او دوه مربع ګانې لکه مخامخ شکل يو د بل ترځنګ داسې کېږدی چې يوه بله لويه مربع د($a+b$) د ضلعې په اوږدوالي سره جوړه شي.

د پورته شکل له مخې آيا لاندې مساوات سم دی؟

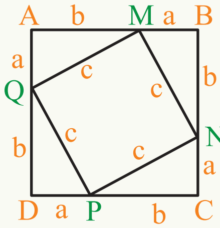


د مربع مساحت د b په ضلعې سره + د مربع مساحت د a په ضلعې سره + ٤ انطباق منونکو قايم الزاويه مثلثونو مساحت = د مربع مساحت د (a+b) په ضلعې سره

د پورته مساوات له مخې د پورتنيو شکلونو د هغو مربع ګانو مساحت، چې د ضلعو اوږدوالی يې $a+b$ دي، که چېرې له پورته دوو شکلونو څخه 4 انطباق منونکي ورکړ شوي مثلثونه لرې کړو، د هغو پاتې مساحت هم بايد يو له بل سره مساوي وي. له دې امله ويلای شو: $c^2 = a^2 + b^2$ دا رابطه په لومړي ځل د فيثاغورث په واسطه ثابته شوې ده.

قضيه: په هر قايم الزاويه مثلث کې د هغې مربع مساحت چې د وتر په اوږدوالي جوړېږي د هغو دوو مربع ګانو د مساحتونو له مجموعې سره برابره ده چې د مثلث د قايمې زاويې د اضلاعو په اوږدوالي جوړېږي.

فعالیت

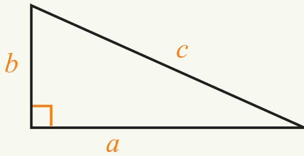


په مخامخ شکل کې د $a+b$ په ضلعې یوه مربع لرو:

- آیا د MNPQ خلور ضلعي یوه مربع ده؟ خرگنده یې کړئ.
- د ABCD د مربع مساحت یو ځل په مستقیمه توگه د $a+b$ د ضلعې د اوږدوالي په کارولو سره محاسبه کړئ.
- د ABCD د مربع مساحت د خلورو $\overset{\Delta}{AMQ}$، $\overset{\Delta}{MNB}$، $\overset{\Delta}{NCP}$، $\overset{\Delta}{DPQ}$ انطباق منونکو مثلثونو او MNPQ د مربع د مساحتونو د مجموع په کارولو سره محاسبه کړئ.

په دوو پړاونو کې د لاس ته راغلو رابطو له پرتله کولو څخه نتیجه اخلئ.

پورتنی فعالیت د فیثاغورث د قضیې په نامه شهرت لري.



د فیثاغورث قضیه

په هر قایم الزاویه مثلث کې د وتر مربع د هغه مثلث د قایمو ضلعو د مربعاتو له مجموعي سره مساوي ده، یعني: $a^2+b^2=c^2$

ثبوت: د پورته شکل له مخې لیکلای شو:

$$S_{(ABCD)}=(a+b)(a+b)$$
$$=a(a+b)+b(a+b)$$
$$=a^2+ab+ba+b^2$$
$$=a^2+2ab+b^2..............1$$

له بلې خوا، خرگنده چې:

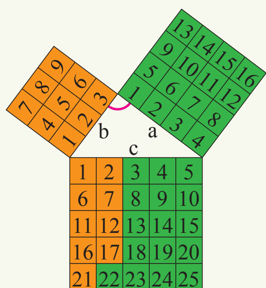
$$S_{(ABCD)}=4S_{(\overset{\Delta}{AMQ})}+S_{(MNPQ)}$$
$$=4(\frac{1}{2}ab)+c^2...........II$$

د I او II رابطو له پرتله کولو څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي:

$$a^2+b^2+2ab=4(\frac{1}{2}ab)+c^2$$
$$\Rightarrow \quad a^2+b^2+2ab=2ab+c^2$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{a^2+b^2=c^2}$$

لومړی مثال: د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په لاندې ډول دي.

$a=4cm$ ، $b=3cm$ ، $c=5cm$



حل: په شکل کې لیدل کېږي چې د (a) پر ضلعې باندې 16 مربع ګانې چې هره ضلع یې $1cm$ دی، شته.
د (b) په قایمې ضلعې باندې 9 مربع ګانې چې هره ضلع $1cm$ اوږده ده، شته او د c په قایمې ضلع باندې 25 مربع ګانې چې هرې ضلعې اوږدوالی یې $1cm$ دی شته دي

$$25cm^2 = 16cm^2 + 9cm^2$$

په نتیجه کې:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



دویم مثال: د $\overset{\Delta}{ABC}$ په قایم الزاویه مثلث کې د AC د ضلعې اندازه حساب کړئ.

حل:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

$$(25)^2 = \overline{AC}^2 + (15)^2$$

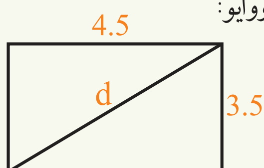
$$625 = \overline{AC}^2 + 225$$

$$\overline{AC}^2 = 625 - 225$$

$$\overline{AC}^2 = 400 \,,\quad \overline{AC} = 20\text{cm}$$

دریم مثال: د مستطیل ضلعې په ترتیب سره $3.5cm$ او $4.5cm$ دي د قطر اوږدوالی حساب کړئ.

حل: د فیثاغورث له قضیې سره سم که چېرې د قطر اوږدوالی ته d ووایو:



$$d^2 = (4.5\text{cm})^2 + (3.5\text{cm})^2$$

$$d^2 = 20.25\text{cm}^2 + 12.25\text{cm}^2$$

$$d^2 = 32.50\text{cm}^2 \Rightarrow d = \sqrt{32.50\text{cm}^2} \Rightarrow d \approx 5.7\text{cm}$$

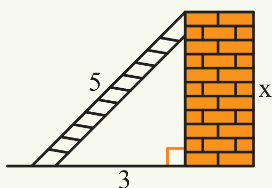
تمرین

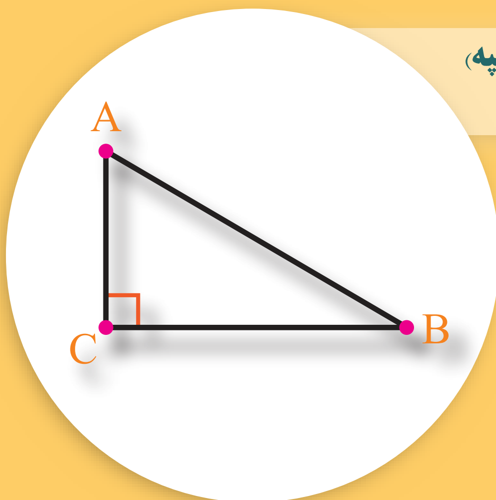
1- د خپل ټولګی اوږدوالی او سور په متر اندازه کړئ. د دوو مخامخ کونجونو ترمنځ فاصله لومړی د فیثاغورث د قضیې په کارولو او بیا د متر په واسطه حساب کړئ. نتیجې یې پرتله کړئ.

2- که چېرې د مربع د یوې ضلعې اوږدوالی 4 واحده وي د قطر اوږدوالی یې پیدا کړئ.

3- د ABC په قایم الزاویه مثلث کې $\overline{BC} = 6$ ، $\overline{AB} = 8$ دی د وتر اوږدوالی پیدا کړئ؟

4- په مخامخ شکل کې زینې له ځمکې او دیوال سره یو قایم الزاویه مثلث جوړ کړی دی. که چېرې د زینې اوږدوالی $5m$ او د یوې قایمې ضلعې اوږدوالی $3m$ وي د هغې بلې ضلعې یعنې x قیمت پیدا کړئ.





د فیثاغورث د قضیې معکوس (سرچپه)
Pythagoraen

درې اختیاري ټوټه خطونه په کوم حالت کې قایمه الزاویه مثلث جوړولای شي؟

فعالیت

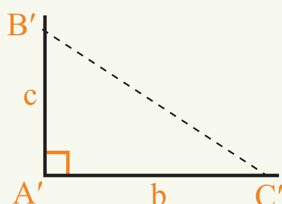
- یو مثلث چې د ضلعو اوږدوالی یې 4,3 او 5 سانتي متر وي، رسم کړئ.
- ددې مثلث د زاویو اندازه حساب کړئ.
- لاس ته راغلی مثلث څه ډول مثلث دی؟
- ددې مثلث د ضلعو د اوږدوالي تر منځ څه ډول رابطه لیدل کېږي؟
- پورتنی فعالیت د داسې مثلث لپاره سرته ورسوئ چې د ضلعو اوږدوالي یې په ترتیب سره 10,8 او 6 وي.

پورتنی فعالیت د فیثاغورث د قضیې د معکوس (سرچپه) قضیې په توګه په لاندې ډول بیانولی شو:

د فیثاغورث د قضیې معکوس (سرچپه):

که چېرې په یوه مثلث کې د دوو ضلعو د مربعاتو مجموعه د هغه د درېیمې ضلعې له مربع سره مساوي وي، نو مثلث قایم الزاویه دی.

ثبوت: فرض کړئ چې د ABC مثلث د a, b او c ضلعو اوږدوالی لرو: $a^2 = b^2 + c^2$



د $A'B'C'$ مثلث د b او c ضلعو په اوږدوالي سره داسې رسموو چې د A' راس یې قایم وي. ددې کار لپاره لومړی د A' قایمه زاویه رسموو او د هغې زاویې د ضلعو په مخ باندې د b او c په اوږدوالي ټوټه خطونه جلاکوو او هغو ټکو ته B' او C' وایو.

د فیثاغورث له قضیې سره سم د $A'B'C'$ په قایم الزاویه مثلث کې لرو: $\overline{B'C'}^2 = b^2 + c^2$

له بلې خوا پوهېږو چې: $b^2 + c^2 = a^2$

په نتیجه کې: $\overline{B'C'}^2 = a^2$

$\overline{B'C'} = a$

نو د ABC او $A'B'C'$ دوه مثلثونه چې درې واړه ضلعې یې سره مساوي دي، انطباق منونکي دي. په نتیجه کې د هغو زاویې هم یو په یو مساوي دي، نو د $\hat{A}$ زاویه یې قایمه ده، یعنې د ABC مثلث، قایم الزاویه مثلث دی.

مثال: یو مثلث چې د ضلعو اوږدوالی یې په ترتیب $\overline{AB} = \sqrt{3}$, $\overline{AC} = \sqrt{2}$ او $\overline{BC} = \sqrt{5}$ وي، وواياست چې دا مثلث څه ډول مثلث دی؟

حل:د مثلث د ضلعو د اندازو له مخې لرو چې:

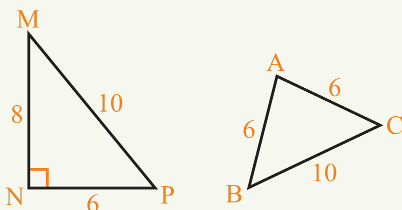
$$(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{5})^2$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

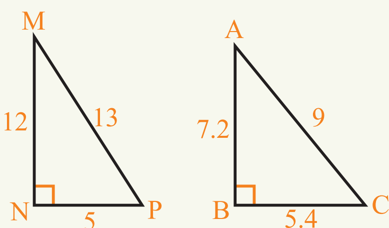
نو د فیثاغورث د قضیې له عکس سره سم ویلای شو چې ABC مثلث د A په راس کې قایم دی.

تمرین

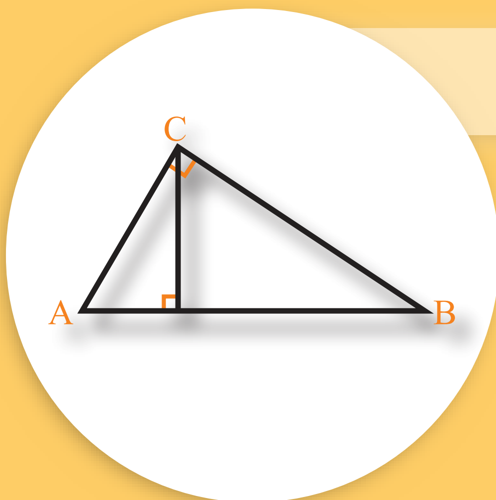
1- د ABC او MNP دوه مثلثونه درکړل شوي دي وښیاست چې کوم یو یې قایم الزاویه مثلث دی؟



2- په لاندې قایم الزاویه مثلثونو کې د فیثاغورث د قضیې د سموالي څېړنه وکړئ.



د قایم الزاویه مثلث قضیې



په مخامخ شکل کې څو قایم الزاویه مثلثونه وینئ؟ آیا دا مثلثونه یو بل ته ورته دي؟

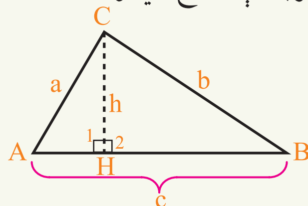
فعالیت

- د ABC قایم الزاویه مثلث داسې رسم کړئ چې د C زاویه یې قایمه وي.
- د C له راس څخه د هغه په وتر باندې یوه ارتفاع رسم کړئ او هغه ته $\overline{CH}$ وواياست؟
- د ACH او BCH مثلثونه څه ډول مثلثونه دي؟
- آیا د ACH او ABC مثلثونه یو بل ته ورته (مشابه) دي؟ ولې؟
- آیا د BCH او ABC مثلثونه یو بل ته ورته (مشابه) دي؟ ولې؟
- آیا د ACH او BCH مثلثونه یو بل ته ورته (مشابه) دي؟ ولې؟

له پورتني فعالیت څخه لیدل کیږي چې که د قایم الزاویه مثلث په وتر باندې ارتفاع رسم شي، نوموړی مثلث په دوو ورته مثلثونو باندې ویشي. ددې مطلب په کارولو سره کولای شو د لاندې قضیې په ثبوت کې ترې ګټه واخلو:

لومړی قضیه: په هر قایم الزاویه مثلث کې، د قایمو ضلعو د ضرب حاصل د وتر او په وتر باندې د رسم شوي ارتفاع د ضرب له حاصل سره مساوي وي.

ثبوت: فرض کړئ چې $\overline{CH}$ د ABC قایم الزاویه مثلث پر وتر باندې ارتفاع وي نو د ACH او ABC په دوو مثلثونو کې لرو چې:



نتيجه: $\left.\begin{array}{l}\hat{C}=\hat{H}_1=90^\circ \\ \hat{A}=\hat{A}_{\text{ګډه زاویه}}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ACH}$

له دوو، ورته مثلثونو څخه داسې پایله لاس ته راځي چې د دوو مثلثونو د مساوي زاویو مخامخ ضلعې سره متناسبې دي، یعنې:

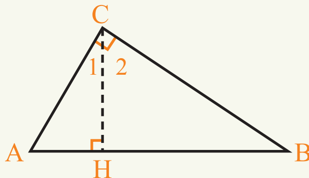
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{CB}}\Rightarrow \overline{AC}\cdot\overline{CB}=\overline{CH}\cdot\overline{AB}$$

دویمه قضیه: په هر قایم الزاویه مثلث کې د وتر اړوند د ارتفاع مربع د هغو دوو ټوټه خطونو د ضرب له حاصل سره مساوي ده چې نوموړی ارتفاع یې پر وتر باندې بېلوي.

ثبوت: فرض کړئ چې CH د ABC قایم الزاویه مثلث پر اړوند وتر باندې ارتفاع وي.

د ABC په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې: $\hat{A}+\hat{B}=90^\circ$..............I

همدارنګه د ACH په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې: $\hat{A}+\hat{C}_1=90^\circ$............II



د I او II روابطو له پرتله کولو څخه نتیجه لاس ته راځي چې: $\hat{B}=\hat{C}_1$

په همدې ډول ښودلای شو چې: $\hat{A}=\hat{C}_2$ ده. ولې؟

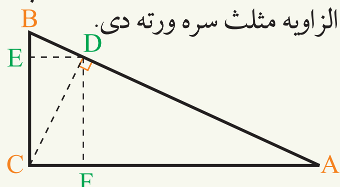
د ACH او CBH په دوو قایم الزاویه مثلثونو کې لرو:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{C}_2\\ \hat{C}_1=\hat{B}\\ \hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{ACH}\sim\overset{\Delta}{CBH}$$

د پورته دوو مثلثونو له ورته والي څخه ویلای شو چې ددې دوو مثلثونو د مساوي زاویو مخامخ ضلعې سره متناسبې دي، یعنې:

$$\frac{\overline{CH}}{\overline{HB}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{CH}}\Rightarrow \overline{CH}^2=\overline{AH}\cdot\overline{HB}$$

لومړی مثال: په لاندې شکل کې $\overline{CD}$ پر $\overline{AB}$ باندې عمود دی او د DECF څلور ضلعي یو مستطیل دی، وښیاست چې BED مثلث له ABC قایم الزاویه مثلث سره ورته دی.



حل: د $A\overset{\Delta}{C}B$ او $B\overset{\Delta}{E}D$ په مثلثونو کې وینو چې:

مشترکه زاویه ده $\hat{B} = \hat{B}$

څرنګه چې $\overline{DE} // \overline{AC}$ دی او $\overline{BC}$ د هغو قاطع ده، نو د قاطع یوې خوا ته زاویې سره مساوي دي،

یعنې: $\hat{C} = B\hat{E}D = 90°$

د دواړو مثلثونو دوه زاویې یو له بله سره مساوي دي، نو له دې امله د ضلعو په منځ کې یې تناسب شته.

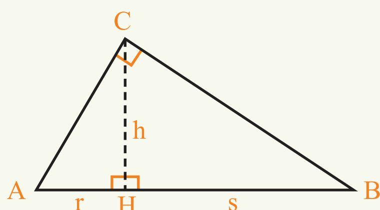
په پایله کې د مثلثونو د ورته والي (مشابه) په پام کې نیولو سره ویلای شو.

$B\overset{\Delta}{D}E \sim A\overset{\Delta}{C}B$

نوټ: په شکل کې د ورته (مشابه) مثلثونو شمېر حساب کړئ.

دویم مثال: په لاندې شکل کې د $\overline{CH}$ د ABC قایم الزاویه مثلث پر اړوند وتر باندې ارتفاع ده. که چېرې $r = 4cm$ ، $s = 9cm$ وي h پیدا کړئ.

حل:



$$\overline{CH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{BH}$$

$$\overline{CH}^2 = 4 \cdot 9$$

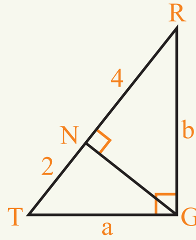
$$\overline{CH}^2 = 36$$

$$\sqrt{\overline{CH}^2} = \sqrt{36}$$

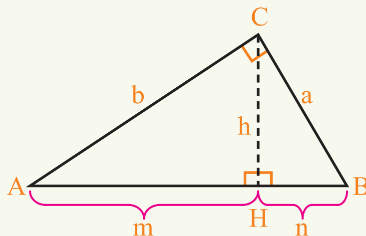
$$\overline{CH} = 6cm$$

تمرين

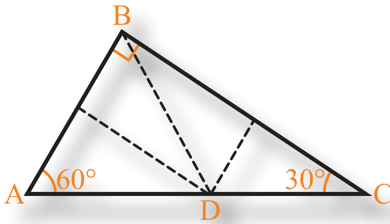
1- په لاندي قایم الزاویه مثلث کې چې د G زاویه یې قایمه ده، د a او b قیمتونه په لاس راوړئ.



2- په لاندي شکل کې که چېرې m=9 ، n=3 وي او $\overline{CH}$ د ABC قایم ا لزاویه مثلث د $\overline{AB}$ پر وتر باندې ارتفاع وي، د a ، b او h قیمتونه پیدا کړئ.

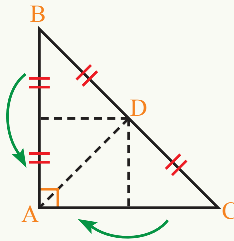


په قایم الزاویه مثلث کې د 30° او 60° زاویو لپاره قضیې



آیا په مخامخ شکل کې د 30° زاویې مخامخ ضلع د وتر د اوږدوالي له نیمایي سره برابره ده؟

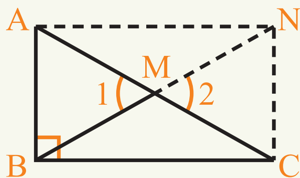
فعالیت



- د کاغذ پر مخ باندې یو قایم الزاویه مثلث دلاندې شکل په توګه رسم او بیاتي کړئ.
- د ABC مثلث داسې قات کړئ چې د B راس د A په راس سر په سر ولویږي.
- همدارنګه دویم واري داسې قات کړئ چې د C راس د A په راس باندې ولویږي.
- که چېرې د تقاطع ټکې ته D ووایو. آیا ویلای شو چې $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{DB}$ دي؟ ولې؟

هغه پایله چې د پورته فعالیت څخه په عملي توګه لاس ته راځي کولای شو د لاندې قضیې په توګه یې ثابت کړو:

قضیه: په هر قایم الزاویه مثلث کې د هغې میانې اوږدوالی چې له قایم راس څخه په وتر باندې رسم کېږي د وتر د اوږدوالي له نیمایي سره مساوي دی.



ثبوت: فرض کړو چې $\overline{BM}$ د ABC د مثلث په وتر باندې میانه ده. غواړو وښیو چې:

$$\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{AC}$$

د ثبوت لپاره د $\overline{BM}$ میانه په خپله اندازه اوږدوو، تر څو د N ټکي په لاس راشي.

نو: $\overline{BM}=\overline{MN}$

د AMB او MNC په دوو مثلثونو کې لرو چې:

$$\left.\begin{array}{ll}\overline{AM}=\overline{MC} & \ldots \text{میانه ده } BM\\ \overline{BM}=\overline{MN} & \ldots \text{د ترسیم له مخې}\\ \hat{M}_1=\hat{M}_2 & \ldots \text{متقابل بالراس}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{AMB}\cong\overset{\Delta}{MNC}$$

د AMB او MNC دوو انطباق منونکو مثلثونو په پام کې نیولو سره داسې پایله لاس ته راځي چې ددې مثلث متناسبی اضلاع هم سره انطباق منونکي دي، یعنې:

$\overline{AB}=\overline{NC}$.............I

په همدې ډول د AMN او BMC دوو انطباق منونکو مثلثونو څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي:

$\overline{AN}=\overline{BC}$.............II

له I او II رابطو څخه لیکلای شو چې د ABCN په څلور ضلعي کې مخامخ ضلعې یو له بله سره مساوي دي، څرنګه چې یوه زاویه یې قایمه ده، نو: ABCN یو مستطیل دی.

له بلې خوا پوهېږو چې په مستطیل کې قطرونه یو له، بل سره مساوي او همدارنګه د یو بل نمایي کوي.نو:

$$\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{AC}$$

فعالیت

- د ABC قایم الزاویه مثلث داسې رسم کړئ چې د حاده زاویو اندازه یې په ترتیب سره 30° او 60° وي.
- د وتر او قایمو ضلعو اوږدوالی د خط کش په واسطه اندازه کړئ.
- ددې مثلث د ضلعو د اوږدوالي تر منځ څه ډول رابطه شته؟
- پورتنی فعالیت په بل قایم الزاویه مثلث باندې چې زاویې یې $30^\circ, 60^\circ$ وي، تکرار کړئ.

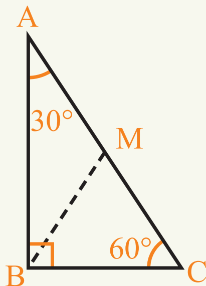
له پورتنی فعالیت څخه په ګټې لاندې قضیه بیان او ثبوتولای شو.

قضیه: که چېرې په یوه قایم الزاویه مثلث کې د یوې حاده زاویې اندازه 30° وي، د دې زاویې مخامخ ضلعې اوږدوالی د وتر د اوږدوالي نیمایي دي.

ثبوت: د ABC په قایم الزاویه مثلث کې فرض کړو $\hat{A}=30^\circ$ او $\hat{B}=90^\circ$ وي.

غواړو ثبوت کړو چې: $\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AC}$

د ثبوت لپاره میانه رسموو او هغه ته $\overline{BM}$ وایو. د مخکنۍ قضیې له مخې پوهیږو چې په قایم الزاویه مثلث کې میانه د اړوند وتر نیمایي ده.



نو: $\overline{BM}=\overline{MC}$

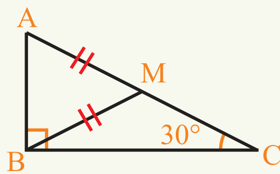
په پایله کې د BMC مثلث متساوی الساقین دی.

له دې ځخه لاس ته راځي چې: $M\hat{B}C=M\hat{C}B=60^{\circ}$

نو د MBC مثلث متساوي الاضلاع دی. ولې؟

له دې امله: $\overline{BC}=\overline{MC}$

څرنګه چې M د AC منځنۍ ټکی دی. $\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AC}$



مثال: که چېرې د ABC مخامخ شکل قایم الزاویه مثلث او $\overline{BM}$ د هغه اړوند میانه چې اوږدوالی یې 3 واحده دی، د مثلث د ضلعو اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: په قایم الزاویه مثلث کې پوهیږوچې میانه د اړوند وتر نیمایي ده:

نو: $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{AC}\Rightarrow 3=\frac{1}{2}\overline{AC}\Rightarrow\overline{AC}=6$

له بلې خوا پوهیږو چې د 30° زاویې مخامخ ضلع د اړوند وتر نیمایي ده.

نو: $\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{AC}\Rightarrow\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 6\Rightarrow\overline{AB}=3$

اوس د فیثاغورث د قضیې په کارولو سره د مثلث د دریمې ضلعې اندازه محاسبه کوو.

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$$

$$\Rightarrow 3^2+\overline{BC}^2=6^2$$

$$\Rightarrow 9+\overline{BC}^2=36$$

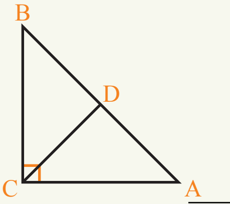
$$\Rightarrow\overline{BC}^2=36-9$$

$$\Rightarrow\overline{BC}^2=27$$

$$\Rightarrow\overline{BC}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

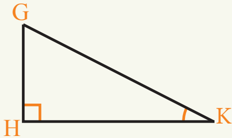
تمرين

1- د ABC په مثلث کې د $\hat{C}$ قایمه ده. که چېرې $\overline{AB}=16$ او $\overline{CD}$ د نوموړي مثلث میانه وي، د $\overline{CD}$ اوږدوالی پیدا کړئ.

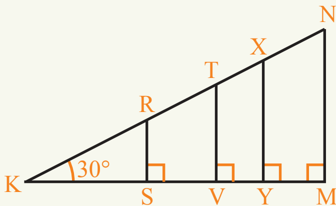


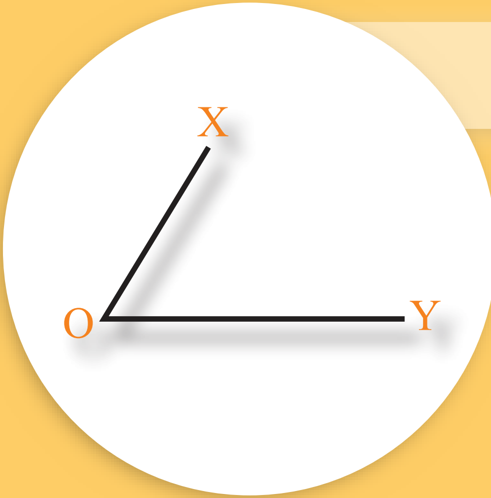
2- که چېرې په پورتني شکل کې د میانې اوږدوالی یعنې $\overline{CD}=15$ وي $\overline{AB}$ پیدا کړئ؟

3- د GHK په مثلث کې د $\hat{H}$ قایمه او $\overline{GH}=\frac{1}{2}\overline{GK}$ ، سره دی د K زاویې اندازه څومره ده.



4- د KMN په مثلث کې د M زاویه قایمه ده $\hat{K}=30^{\circ}$ ده . $\overline{XY}$, $\overline{TV}$, $\overline{RS}$ پر $\overline{KM}$ عمود دي. که چېرې $\overline{KR}=6$ ، $\overline{KN}=16$ ، $\overline{KX}=13$ او $\overline{KT}=10$ وي په دې صورت کې $\overline{XY}$, $\overline{TV}$, $\overline{RS}$ او $\overline{MN}$ پیدا کړئ.





ناصف الزاويه

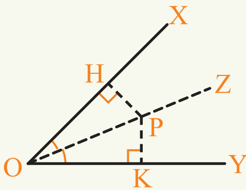
آيا د يوه ناصف الزاويې ټول ټکي د همغه زاويې له دوو ضلعو څخه مساوي فاصله لري؟

فعاليت

- د $\hat{xoy}$ زاويې، ناصف الزاويه رسم او هغه ته $\overline{OZ}$ وواياست.
- يو اختياري ټکی د $\overline{OZ}$ په مخ باندې وټاکئ او هغه ته P وواياست.
- د P له ټکي څخه د زاويې په دوو ضلعو د ox او oy باندې عمودونه رسم کړئ هغو ته $\overline{HP}$ او $\overline{KP}$ وواياست.
- د $\overline{HP}$ او $\overline{KP}$ اوږدوالی د خط کش په واسطه اندازه کړئ. ددې عمود د اوږدوالي تر منځ څه ډول اړيکې ليدل کيږي؟

کولی شو پورتنی ليدنې د لاندې قضيې په توګه بيان او ثبوت کړو.

قضيه: د ناصف الزاويې هر ټکی د زاويې له دوو ضلعو څخه مساوي الفاصله دی.



ثبوت: فرض کوو چې $\overline{OZ}$ د $Y\hat{O}X$ ناصف الزاويه وي، غواړو وښيو چې:

$$\overline{PH} = \overline{PK}$$

د OHP او OKP په دوو مثلثونو کې لرو چې:

$\hat{H} = \hat{K} = 90^\circ$

$X\hat{O}Z = Y\hat{O}Z$ ، $\overline{OZ}$ ناصف الزاويه دی،

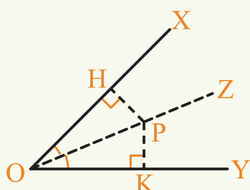
$\overline{OP} = \overline{OP}$ ګډه ضلع،

$$\Rightarrow O\overset{\Delta}{P}K \cong O\overset{\Delta}{P}H$$

د OPK او OPH په دوو قايم الزاويه مثلثونو کې د وتر او يوې حاده زاويې له مساوي کېدو څخه داسې نتيجه اخلو چې دا دوه مثلثونه انطباق منونکي دي. له دې امله: $\overline{PH}=\overline{PK}$

د پورتنۍ قضيې معکوس (سرچپه) هم سم دی.

قضيه: هر ټکی چې د يوې زاويې له دوو ضلعو څخه متساوي الفاصله وي هغه ټکی د ناصف الزاويې پر مخ باندې پروت دی.



ثبوت: فرضوو چې د P ټکی د $\overline{XO}$ او $\overline{YO}$ له دوو ضلعو څخه متساوي الفاصله وي، يعني: $\overline{PH}=\overline{PK}$
غواړو وښيو چې د P ټکی د YOX زاويې د ناصف الزاويې پر مخ باندې دی يعني: $X\hat{O}P=Y\hat{O}P$

ددې ثبوت لپاره د $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ پر ضلعو باندې د $\overline{PH}$ او $\overline{PK}$ عمودونه رسموو د HPO او KPO دوه قايم الزاويه مثلثونه په پام کې نيسو:

$\overline{PH}=\overline{PK}$ د فرضيې له مخې
$\hat{H}=\hat{k}=90^\circ$
$\overline{OP}=\overline{OP}$ ګډه ضلع

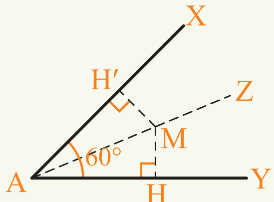
$$=\overset{\Delta}{OPH}\cong\overset{\Delta}{OPK}$$

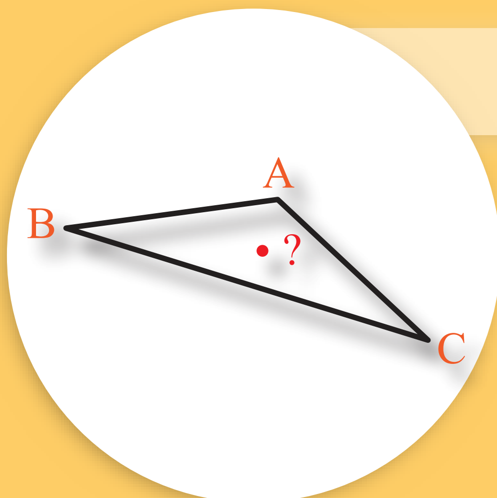
نو د حاده زاويې ديوې ضلعې او وتر له مساوي کېدو څخه داسې پايله لاس ته راځي چې د OPH او OPK مثلثونه انطباق منونکي دي. له دې امله د هغو هم ډوله زاويې هم سره انطباق منونکي دي.
نو: $X\hat{O}P=Y\hat{O}P$

يعني د P ټکی د $X\hat{O}Y$ د ناصف الزاويې پر مخ باندې موجود دی.

تمرين

په لاندې شکل کې د M ټکی د A زاويې د ناصف الزاويې پر مخ باندې دی او $\overline{MH'}$ پر $\overline{AX}$ باندې عمود دی د AMH مثلث د ضلعو اوږدوالی په لاس راوړئ.





د مثلث د داخلي زاويو ناصفونه

آيا کولای شو د مثلث دننه داسې يو ټکی پيدا کړو چې له درې واړه ضلعو سره مساوي فاصله ولري؟

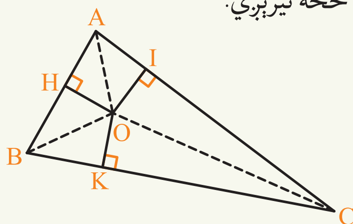
فعاليت

- د ABC يو اختياري مثلث رسم کړئ.
- د B او C زاويو داخلي ناصفونه رسم کړئ چې يو بل د O په ټکی کې قطع کړي.
- د A زاويې داخلي ناصف الزاويه رسم کړئ.
- آيا د A ناصف الزاويه هم د O له ټکي څخه تيرېږي؟
- د $A'B'C'$ يو بل اختياري مثلث رسم کړئ او پورتنی فعاليت د هغه لپاره هم تکرار کړئ.

کولای شو پورتنی ليدنې په لاندې توګه بيان او ثبوت کړو.

قضيه: په هر مثلث کې داخلي ناصف الزاويې يو بل دمثلث په دننه کې په يوه ټکي کې قطع کوي.

ثبوت: فرضوو چې د ABC په مثلث کې د $\hat{B}$ او $\hat{C}$ ناصف الزاويې يو بل د O په ټکي کې قطع کوي. اوس ښيو چې د $\hat{A}$ ناصف الزاويه هم د O له ټکي څخه تيرېږي.



د لاندې شکل په پام کې نيولو سره لرو:

څرنګه چې O د $\hat{B}$ ناصف الزاويې پر مخ باندې دی.

نو: $\overline{OH}=\overline{OK}$..................I

همدارنګه O د $\hat{C}$ ناصف الزاويې پر مخ باندې هم دی.

نو: $\overline{OK}=\overline{OI}$..................II

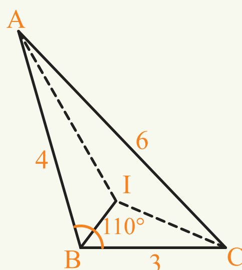
پوهيږو که چيرې د دوو مساواتو يوه خوا يو له بل سره مساوي او بله خوا يې هم سره مساوي کېږي له دې امله د I او II روابطو څخه نتيجه لاس ته راځي:

$$\overline{OH}=\overline{OI}$$

له بلې خوا له مخکنۍ قضيې څخه پوهيږو هر ټکی چې د يوې زاويې له دوو ضلعو څخه مساوي الفاصله وي هغه ټکی د هغې زاويې د نيمايي کوونکي (ناصف الزاويه) پر مخ پروت دی.
له دې امله د O ټکې د A ناصف الزاويې پر مخ باندې هم پروت دی.
په نتيجه کې ويلای شو: د مثلث درې واړه داخلي ناصف الزاويې يو بل په يوه ټکي کې قطع کوي.

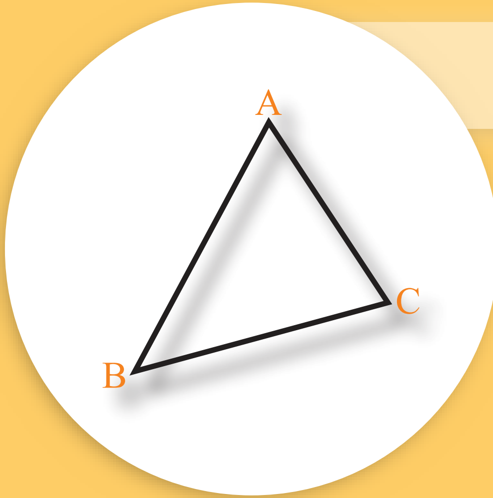
مثال: يو مثلث د 3،6 او 4 ضلعو په اوږدوالي رسم کړئ. وښياست چې ناصفونه يو بل په يوه ټکي کې قطع کوي.

حل: لومړی د راکړ شوو ضلعو په اوږدوالي د ABC مثلث رسموو. بيا په ترتيب سره د A ، B او C له راسونو څخه د هغو زاويو ناصفونه رسموو.
ليدل کيږي چې درې واړه ناصفونه يو بل په يوه ټکي کې قطع کړي دي.



تمرين

1- يو مثلث د $\hat{A} = 20^\circ$, $\hat{B} = 75^\circ$ او $\hat{C} = 85^\circ$ په زاويو سره رسم کړئ وښاياست چې ددې زاويو ناصفونه يو بل په يوه ټکي کې قطع کوي.



په یوه مثلث کې عمودي ناصف

آیا د مثلث د یوې ضلعې عمودي ناصف هرومرو د هغې له مخامخ راس څخه تیرېږي؟

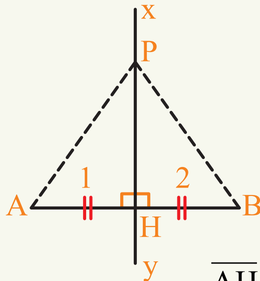
فعالیت

A ——— B

- د $\overline{AB}$ د ټوټه خط عمودي ناصف رسم کړئ.
- د $\overline{AB}$ د ټوټه خط پر عمودي ناصف باندې د P یو ټکی وټاکئ.
- د $\overline{AB}$ د ټوټه خط دوه سرونه (پای ټکي) له P سره ونښلوئ.
- د $\overline{PA}$ او $\overline{PB}$ اوږدوالی د خط کش په واسطه اندازه کړئ، دا اوږدوالي یو له بل سره څه ډول رابطه لري؟
- د $\overline{A'B'}$ یو بل ټوټه خط رسم کړئ او پورتنی فعالیت پر هغه باندې تکرار کړئ.

د پورتني لیدنې نتیجه په لاندې توګه ثبوت او بیانولای شو:

قضیه: د یوه ټوټه خط د عمودي ناصف پر مخ باندې هر ټکی د نوموړي ټوټه خط له دوو سرونو (انجامونو) څخه متساوي الفاصله دی.



ثبوت: فرضوو چې XY د $\overline{AB}$ د ټوټه خط عمودي ناصف دی غواړو وښیو د P هر اختیاري ټکی چې د عمودي ناصف پر مخ باندې دی د A او B څخه په مساوي فاصله کې پروت دی.

یعنې: $\overline{PB} = \overline{PA}$

د PAH او PHB له دوو مثلثونو څخه لرو چې:

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{AH} = \overline{BH} & XY \text{ عمودي ناصف دی،} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ & XY \text{ عمودي ناصف دی،} \\ \overline{PH} = \overline{PH} & \text{ګډه ضلع،} \end{array}\right\} \Rightarrow P\overset{\Delta}{A}H \cong P\overset{\Delta}{B}H$$

خرنگه چې د PAH او PBH په دوو مثلثونو کې دوه ضلعې او د منځ زاویې یې مساوي دي له دې امله نوموړې مثلثونه انطباق منونکي دي. په نتیجه کې د هغو هم دوله ضلعې هم یو له بل سره مساوي دي یعنې: $\overline{PB} = \overline{PA}$

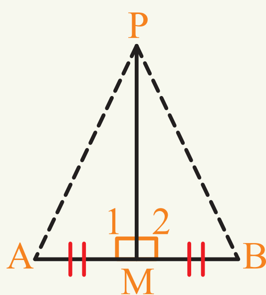
د پورتنۍ قضیې معکوس (سرچپه) هم سم دی.

قضیه: هر ټکی چې د یوه توټه خط له دوو انجامونو څخه مساوي فاصله ولري نوموړی ټکی د توټه خط په عمودي ناصف باندې پروت دی.

ثبوت: فرضوو چې د P ټکی د AB د توټه خط له دوو انجامونو څخه مساوي فاصله لري.

یعنې: $\overline{PB} = \overline{PA}$

غواړو وښیو چې دP ټکی د $\overline{AB}$ د توټه خط د عمودي ناصف پر مخ باندې پروت دی.



خرنگه چې: $\overline{PB} = \overline{PA}$ دی، نو PAB مثلث متساوي الساقین دی له دې امله: $\hat{A} = \hat{B}$

د $\overline{AB}$ توټه خط منځنی ټکی ته M وایو.

نو: $\overline{AM} = \overline{MB}$

اوس د P ټکی د $\overline{AB}$ د توټه خط له منځنی ټکې سره نښلوو چې د PAM او PBM دوه مثلثونه لاس ته راځي:

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{PA} = \overline{PB} \cdots & \text{د فرضیې له مخې} \\ \overline{MA} = \overline{MB} \cdots & \text{منځنی ټکی } M \\ \hat{A} = \hat{B} \cdots & \text{د متساوي الساقین مثلث له مخې} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{PAM} \cong \overset{\Delta}{PBM}$$

اوس د PAM او PBM دوه مثلثونه په پام کې نیسو چې د هغو دوه ضلعې او د منځ زاویه یې مساوي او یو په بل باندې منطبق دي، په پایله کې نورې هم دوله زاویې هم سره مساوي دي، یعنې:

$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

خرنگه چې:

$$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^\circ$$

نو:

$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$$

نو ویلای شو چې $\overline{PM}$ د $\overline{AB}$ توټه خط عموداً نیمایي کړی دی او د P ټکی د AB د توټه خط په عمودي نیمایي کوونکي باندې پروت دی.

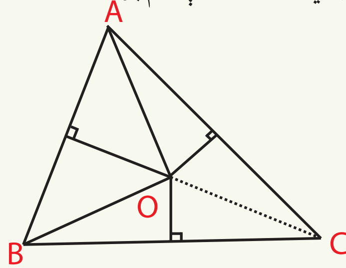
فعالیت

- د ABC یو کیفي مثلث رسم کړئ.
- د $\overline{AB}$ او $\overline{AC}$ د ضلعو عمودي ناصفونه رسم کړئ. د هغو د تقاطع ټکي ته O وواياست.
- د $\overline{BC}$ د ضلعې عمودي ناصف رسم کړئ آیا دا عمودي ناصف هم د O له ټکي څخه تیریږي؟
- د $A'B'C'$ یو بل اختیاري مثلث رسم او پورتنۍ فعالیت وربانديې سر ته ورسوئ.

کولی شو د پورتني فعالیت لیدنې په لاندې توګه بیان او ثبوت کړو.

قضیه: په هر مثلث کې د هغه د ضلعو عمودي ناصفونه یو بل په یوه ټکي کې قطع کوي.

ثبوت: د ABC په مثلث کې د $\overline{AB}$ او $\overline{AC}$ د ضلعو عمودي ناصفونه یو بل د O په ټکي کې قطع کړي دي. غواړو وښیو چې د O ټکی د $\overline{BC}$ د ضلعې په عمودي ناصف باندې هم پروت دئ.



څرنګه چې O د $\overline{AB}$ پر عمودي ناصف باندې پروت دی.

نو: $\overline{OA}=\overline{OB}$..................I

همدارنګه O د $\overline{AC}$ پر عمودي ناصف باندې پروت دی.

نو: $\overline{OA}=\overline{OC}$..................II

د I او II مساواتو څخه لیکلای شو چې:

$$\overline{OB}=\overline{OC}$$

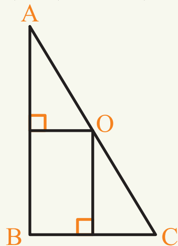
له بلې خوا له مخکنۍ قضیې څخه پوهیږو چې هر ټکی د یوه ټوټه خط د انجامونو څخه په مساوي فاصله کې پروت وي دا ټکی د نوموړي ټوټه خط د عمودي ناصف په مخ باندې پروت دی، نو ویلای شو چې د O ټکی د $\overline{BC}$ د ضلعې په عمودي ناصف باندې پروت دی.

په نتیجه کې ویلای شو: د هر مثلث د ضلعو عمودي ناصفونه یو بل په یوه ټکی کې قطع کوي.

مثال: یو قایم الزاویه مثلث رسم کړئ. د هغه د ضلعو د عمودي ناصفونو ځای پیدا کړئ.

حل: د ABC قایم الزاویه مثلث رسم او د هغه د ضلعو عمودي ناصفونه رسموو. لیدل کیږي چې په قایم الزاویه مثلث کې د قایمو ضلعو عمودي ناصفونه یو بل د وتر په منځنۍ ټکي کې، چې د وتر پر مخ باندې پروت دی، قطع کوي.

په نتیجه کې ویلای شو: په هر قایم الزاویه مثلث کې عمودي ناصفونه یو بل په یو داسې ټکی کې چې پر وتر باندې منځنۍ ټکی دی قطع کوي.

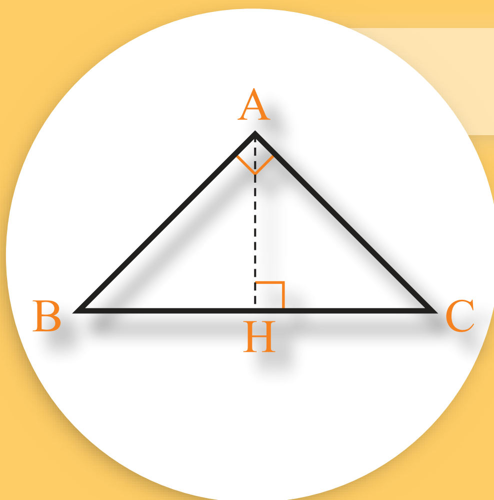


تمرين

1- د ABC مثلث د 30°, 70° او 80° په زاویو سره رسم کړئ، ددې مثلث د ضلعو د عمودي ناصفونو د تقاطع ټکی پیدا کړئ.

2- یو مثلث د 6، 4 او2.5 سانتي مترو ضلعو په اوږدوالي سره رسم کړئ او وروسته د هغو ضلعو عمودي ناصفونه رسم کړئ د عمودي ناصفونو د تقاطع ټکی پیدا کړئ.

د مثلث ارتفاع ګانې

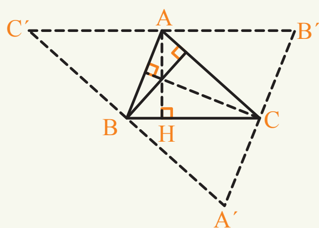


د ABC مثلث قایم الزاویه دی. که چېرې $\overline{AH}$ د نومورې مثلث ارتفاع په وتر باندې وي، د مثلث نورې ارتفاع ګانې کومې دي؟

فعالیت

- د ABC اختیاري مثلث رسم کړئ.
- د A له راس څخه د $\overline{BC}$ په ضلعې باندې ارتفاع رسم او د هغه پای ته H ووایاست.
- د ABC مثلث له راسونو څخه د هغه له ضلعو سره موازي خطونه رسم کړئ.
- له دې خطونو څخه لاس ته راغلي مثلث ته $A'B'C'$ ووایاست. په داسې حال کې چې $\overline{B'C'} // \overline{BC}$ ، $\overline{A'C'} // \overline{AC}$ او $\overline{A'B'} // \overline{AB}$ دي.
- آیا $\overline{AH}$ پر $\overline{B'C'}$ عمود دی؟ ولې؟
- آیا د $ABCB'$ څلور ضلعي متوازي الاضلاع ده؟ ولې؟
- آیا $\overline{AC} = \overline{AB'}$ دي؟ ولې؟
- آیا $\overline{AH}$ د $\overline{B'C'}$ عمودي ناصف دی؟ ولې؟

له پورته فعالیت څخه لیدل کېږي که چېرې د یوه مثلث له راسونو څخه د هغه له ضلعو سره موازي خطونه رسم کړو، یو بل مثلث جوړېږي چې په دې صورت کې د لومړي مثلث ارتفاع ګانې د جوړ شوي مثلث د ضلعو عمودي ناصف دي.
پوهېږو د مثلث د ضلعو عمودي ناصف یو بل، په یوه ټکي کې قطع کوي، نو د مثلث ارتفاع ګانې هم یو بل په یوه ټکي کې قطع کوي.



قضیه: په هر مثلث کې ارتفاع ګانې په یوه ټکي کې متقاطع دي.

ثبوت: د ABC مثلث له راسونو څخه داسې خطونه رسموو چې د نوموړي خطونو له تقاطع څخه، لکه په شکل کې، د $A'B'C'$ مثلث جوړ شي. له شکل څخه لیکلای شو:

$\overline{B'C'} // \overline{BC}$ ، $\overline{A'C'} // \overline{AC}$ او $\overline{A'B'} // \overline{AB}$.

ددې په پام کې نیولو سره چې د $ABCB'$ څلور ضلعي مخامخ ضلعې یو له بله سره موازي دي. نو داسې پایله لاس ته راځي چې دا څلور ضلعي یوه متوازي الاضلاع ده.

له دې امله د $ABCB'$ د څلور ضلعي مخامخ ضلعې سره مساوي دي.

یعنی: $\overline{AB'} = \overline{BC} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots I$

په همدې ډول د $ACBC'$ څلور ضلعي هم یوه متوازي الاضلاع ده، په پایله کې:

$\overline{AC'} = \overline{BC} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots II$

د I او II روابطو څخه نتیجه لاس ته راځي چې: $\overline{AB'} = \overline{AC'}$

له بلې خوا څرنګه چې $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ او $\overline{BC} || \overline{B'C'}$ دي نو $\overline{AH} \perp \overline{B'C'}$ دی.

څرنګه چې: $\overline{AB'} = \overline{AC'}$ او $\overline{AH} \perp \overline{B'C'}$ دی.

نو: $\overline{AH}$ د $\overline{B'C'}$ عمودي نیمایي کوونکی دی.

په همدې ډول ښودلای شو چې د $\overline{AB}$ او $\overline{AC}$ په ضلعو باندې ارتفاع ګانې هم په ترتیب سره د $\overline{A'B'}$ او $\overline{A'C'}$ د ضلعو عمودي نیمایي کوونکې دي. څرنګه چې عمودي نیمایي کوونکي یو بل په یوه ټکي کې قطع کوي، نو ارتفاع ګانې هم یو بل په یوه ټکي کې قطع کوي.

تمرین

1- د ABC مثلث د 5، 4 او 6 سانتي مترو ضلعو په اوږدوالي سره رسم کړئ د هغه د ضلعو ارتفاع ګانې رسم او د هغو د تقاطع د ټکي ځای وټاکئ.

2- یو قایم الزاویه مثلث رسم او ددې مثلث د ارتفاع ګانو د تقاطع ځای وټاکئ.

3- یو مثلث چې یوه زاویه یې منفرجه وي رسم او د هغه د ارتفاع ګانو د تقاطع ځای وټاکئ.

د مثلث مياني

آیا فکر کولای شئ یو مثلث د یوه پنسل په تیره څوکه باندې داسې کیږدی چې ونه لویږي؟

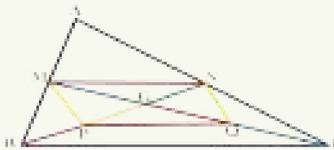


فعالیت

- د ABC اختیاري مثلث رسم کړئ.
- د B له راس څخه د $\overline{BN}$ میانه او د C له راس څخه د $\overline{MC}$ میانه رسم کړئ.
- د هغو دوو میانو د تقاطع ټکی په G سره وښیاست.
- د $\overline{BG}$ او $\overline{GN}$ اوږدوالي د خط کش په واسطه اندازه کړئ، اوږدوالي یې له یو بل سره څه رابطه لري؟
- د $\overline{CG}$ او $\overline{GM}$ اوږدوالي د خط کش په واسطه اندازه کړئ، اوږدوالي له یو بل سره څه ډول رابطه لري؟
- د A له راس څخه د $\overline{BC}$ په ضلعې باندې میانه رسم او د هغه پای ته K ووایاست.
- آیا $\overline{AK}$ د G له ټکي څخه تیریږي؟
- د $\overline{AG}$ او $\overline{GK}$ اوږدوالي په خط کش سره اندازه کړئ ادا اوږدوالی له یو بل سره څه ډول رابطه لري؟

قضیه: د هر مثلث مياني یو بل په یوه ټکي کې قطع کوي او د تقاطع ټکی، هره میانه د 2 او 1 په نسبت ویشي.

ثبوت: د ABC په مثلث کې د G ټکی د $\overline{BN}$ او $\overline{MC}$ د میانو د تقاطع ځای دی. د دې په پام کې نیولو سره چې د $\overline{MN}$ ټوټه خط د $\overline{AB}$ او $\overline{AC}$ د ضلعو منځنی ټکي له یو بل سره نښلوي نو د تالس د قضیې له مخې نتیجه کیږي چې:



$$\overline{BC} \parallel \overline{MN}$$

$$\Rightarrow \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots I$$

د $\overline{BG}$ منځنی ټکي ته P وایو او د $\overline{CG}$ منځنی ټکي ته Q وایو.

$\overline{PQ}$ داسې ټوټه خط دی چې د BGC د مثلث د $\overline{BG}$ او $\overline{CG}$ د ضلعو منځنۍ ټکی یو له بل سره نښلوي، د تالس د قضیې له مخې د GBC په مثلث کې لرو چې:

$\overline{BC} \parallel \overline{PQ}$

$\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{BC}..........II$

د I او II له رابطو څخه داسې پایله لاس ته راځي چې د MNQP څلور ضلعي چې ضلعې یې دوه په دوه موازي او مساوي دي، یوه متوازي الاضلاع ده.

د MNQP په متوازي الاضلاع کې قطرونه یو بل نیمايي کوي، له دې امله:

$\overline{PG} = \overline{GN}$ او $\overline{QG} = \overline{GM}$

له بلې خوا پوهېږو:

$\overline{PG} = \overline{PB}$ او $\overline{QG} = \overline{QC}$

له دې امله لیکلای شو:

$\overline{PG} = \overline{GN} = \overline{PB}$ او $\overline{QG} = \overline{GM} = \overline{QC}$

په پایله کې:

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{GN}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GM}} = \frac{2}{1}$$

څرنګه چې د ABC په مثلث کې د $\overline{CN}$ او $\overline{BN}$ میانې په خپله خوښه یا اختیاري ټاکل شوي دي.
خو دا رابطه د هرو دوو نورو غوښتل شوو میانو لپاره هم سمه ده. له دې څخه داسې پایله لاس ته راځي چې د مثلث درې واړه میانې یو بل په یوه ټکي کې قطع کوي (ولې)؟
د تقاطع ټکی، هر دوه میانې د 2 او 1 په نسبت ویشي.
د میانو د تقاطع ټکي د مثلث د ثقل مرکز دی.

تمرین

1- یو قایم الزاویه مثلث رسم کړئ. د هغه د میانو دتقاطع ځای وټاکئ؟
2- وښیاست چې په هر متساوي الاضلاع مثلث کې د میانو، ناصفونو او ارتفاع ګانو د تقاطع ځای یو ټکی دئ؟
3- که چېرې د ABC په مثلث کې د G ټکی د $\overline{AM}, \overline{BN}$ او $\overline{CK}$ د میانو د تقاطع مرکزوي وښیاست چې؟

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AM}} = \frac{2}{3} \quad , \quad \frac{\overline{GM}}{\overline{AM}} = \frac{1}{3}$$

د پنځم فصل مهم ټکي

د متساوي الساقین مثلث قضیې

- که چېرې د یوه مثلث دوه ضلعې یو له بل سره مساوي وي، نو د هغو دوو ضلعو مخامخ زاویې هم یو له بل سره مساوي دي.
- که چېرې د یوه مثلث دوې زاویې یو له بل سره مساوي وي. د نوموړو زاویو مخامخ ضلعې سره مساوي دي

د فیثاغورث قضیه:

- په هر قایم الزاویه مثلث کې د هغې مربع مساحت چې د وتر په اوږدوالي جوړېږي، د هغو دوه نورو مربع ګانو د مساحتونو له مجموعې سره برابره ده چې د قایمو ضلعو په اوږدوالي جوړېږي.
- په هر قایم الزاویه مثلث کې د وتر مربع د هغه د قایمو ضلعو د مربع له مجموعې سره مساوي ده:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

د قضیې عکس (سرچپه):

که چېرې په یوه مثلث کې د دوو ضلعو مربعاتو مجموعه د هغه د درېیمې ضلعې له مربع سره مساوي وي، نو مثلث قایم الزاویه دی .

د قایم الزاویه مثلث قضیې:

- په هر قایم الزاویه مثلث کې د قایمو ضلعو د ضرب حاصل د وتر او د هغې ارتفاع د ضرب له حاصل سره مساوي دی چې پر نوموړې وتر باندې دی.
- په هر قایم الزاویه مثلث کې دهغې میانې اوږدوالی چې له قایم راس څخه رسم کېږي. عبارت دی د قایمو ضلعو د هندسي وسط څخه چې د نوموړي مثلث پر وتر باندې دی.
- په هر قایم الزاویه مثلث کې د هغې ارتفاع اوږدوالی چې له قایم راس څخه د هغه پر وتر باندې رسمېږي د وتر د اوږدوالی د نیمایي سره مساوي دی.
- که چېرې په یوه قایم الزاویه مثلث کې چې یوه حاده زاویه یې 30° وي، د دې زاویې د مخامخ ضلعې اوږدوالی د وتر د اوږدوالی نیمایي دی.

د هغو خطونو قضيې چې د مثلث په دننه کې یو بل په یوه ټکي کې قطع کوي

- د ناصف الزاویې په مخ باندې هر ټکی یې د زاویې له دوو ضلعو څخه په مساوي فاصله کې پروت دی.
- هر ټکی چې د یوې زاویې له دوو ضلعو څخه په مساوي فاصله کې پروت وي هغه ټکی د ناصف الزاویې په مخ باندې پروت دی.
- په هر مثلث کې داخلي ناصف الزاویې یو بل په یوه ټکي کې قطع کوي.
- د یوه ټوټه خط د عمودې ناصف په مخ باندې هر ټکی د هغه له انجامونو څخه متساوي الفاصله دی.
- هر ټکی چې د یوه ټوټه خط له انجامونو څخه مساوي فاصلې ولري دا ټکی د نوموړي ټوټه خط په عمودي ناصف باندې پروت دی.
- په هر مثلث کې د ضلعو عمودي ناصفونه یو بل په یوه ټکي کې قطع کوي.
- په هر مثلث کې ارتفاع ګانې یو بل په یوه ټکي کې قطع کوي.
- د هر مثلث میانې یو بل په یوه ټکي کې قطع کوي او د میانو د تقاطع ټکی، هره میانه د 2 او 1 په نسبت ویشي.

عمومي پوښتنې

په لاندې پوښتنو کې د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه درکړل شوي دي صحيح ځواب يې پيدا او کرښه ترې تاو کړئ.

1- په منفرجه الزاويه مثلث کې د درې واړو عمودي ناصفونو د تقاطع ځای چېرې دی؟

a) د مثلث دننه　　b) د مثلث د باندې

c) په لويه ضلع باندې　　d) يو يې هم نه دی

2- يو مثلث د 8، 4 او 5 ضلعو په اوږدوالي سره په پام کې ونيسئ، ددې مثلث درې واړه ارتفاع گانې يو بل په:

a) د مثلث په دننه کې قطع کوي

b) د مثلث د باندې قطع کوي

c) د هغې ضلعې پر مخ باندې چې اوږدوالی يې 5 دی قطع کوي

d) په هغه راس کې قطع کوي چې د لوېې ضلعې مخامخ ته دی.

3- په قايم الزاويه مثلث کې د $30°$ زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی عبارت دی، له:

a) د وتر نيمايې　　b) د وتر سره مساوي　　c) 1 پر 3 د وتر　　d) 1 څلورم د وتر

4- که چېرې په يوه قايم الزاويه مثلث کې د قايمو ضلعو اندازه 3 او 2 وي، د وتر اوږدوالی عبارت دی، له:

a) $\sqrt{13}$　　b) $\sqrt{3}$　　c) 3　　d) 2

5- په متساوي الساقين مثلث کې د قاعدې يوه زاويه $65°$ ده. د قاعدې بله زاويه يې عبارت ده له:

a) $50°$　　b) $65°$　　c) $70°$　　d) $45°$

په لاندې جملو کې تش ځايونه په مناسبو کلمو سره ډک کړئ.

1- په هر قايم الزاويه مثلث کې د قايمو ضلعو د ضرب حاصل مساوي دی د هغه مثلث د وتر ارتفاع ....

2- په هر قايم الزاويه مثلث کې د وتر .... چې له قايم راس څخه رسم کېږي مساوي دی د .... ضرب له حاصل سره چې د نومورې مثلث په وتر باندې يې بيلوي.

3- په قايم الزاويه مثلث کې د $30°$ زاويې .... اوږدوالی د وتر له .... مساوي دی.

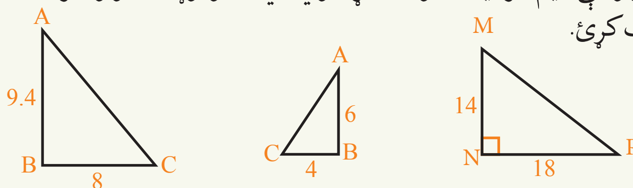
4- په منفرج الزاويه مثلث کې ارتفاع گانې يو بل په .... قطع کوي.

5- که چېرې د يوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتيب 3cm، 4cm او 5cm وي نومورې مثلث .... دی.

6- که چېرې په یوه مثلث کې دوه ضلعې یو له بل سره مساوي وي نو .... یې هم یو له بل سره مساوي دي.

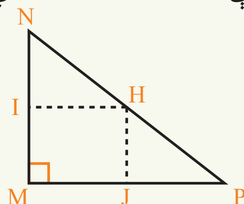
لاندې پوښتنې حل کړئ.

1- په لاندې شکلونو کې قایم الزاویه مثلثونه درکړ شوي دي، د نوموړو مثلثونو وترونه د 0.1 لړ والی په تقرب کې حساب کړئ.



2- د ABC مثلث داسې رسم کړئ چې $\overline{BC} = 6$ ، $\hat{ABC} = 80°$ او $\hat{ACB} = 80°$ وي، وروسته د نوموړي مثلث ناصفونه رسم کړئ.

3- د MNP مثلث چې د M په راس کې قایم وي، په پام کې ونیسئ په نوموړي مثلث کې د $\overline{MH}$ ارتفاع رسم کړئ داسې چې د I او J ټکي د $\overline{MN}$ او $\overline{MP}$ منځنۍ ټکي دي.



a) ثبوت کړئ چې MIH او MJH متساوي الساقین مثلثونه د $\overline{MH}$ په ګډې قاعدې سره دي.

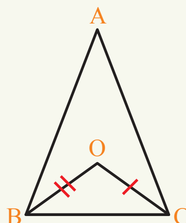
b) ثبوت کړئ چې $\overline{IJ}$ د $\overline{MH}$ عمودي ناصف دی.

c) ثبوت کړئ چې $\overline{HI}$ او $\overline{HJ}$ یو پر بل عمود دي.

٤- د ABC په متساوي الساقین مثلث کې $\overline{AB} = \overline{AC}$ دی که چېرې هغوی د $\overline{OB}$ او $\overline{OC}$ په واسطه نیمایي کړو ثبوت کړئ چې:

a) $\overline{OB} = \overline{OC}$

b) $\overline{OA}$ د $\hat{A}$ نیمایي کوونکی دی.



شپږم فصل

مساحت او حجمونه

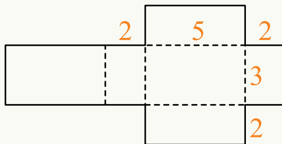


د مکعب مستطیل مساحت او حجم



آیا تر اوسه مو فکر کړئ چې یو انسان د نفس په ایستلو هر وار د هوا څومره حجم خپلو سږو ته داخلوي.

فعالیت

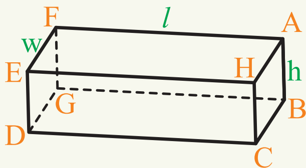


- مخامخ شکل په کاغذ کې رسم او قیچي یې کړئ او بیا یې په ټکي ټکي کرښو باندې قات کړئ.
- یو مکعب مستطیل د 5cm په اوږدوالي 2cm په سور او 3cm په ارتفاع سره رسم کړئ.
- نوموړی مستطیلي مکعب څو راسونه، څو ضلعې او څو سطحې لري؟ هر یو یې وشمېرئ.
- د جانبي (اړخو) سطحو مساحت، چې هره سطح یې مستطیل دی، پیدا یې کړئ.
- نوموړی مستطیلي مکعب څو قاعدې لري؟ د هغه د قاعدې مساحت پیدا کړئ.
- د مساحتونو د مجموع په کارولو سره د مستطیلي مکعب د ټول مساحت فرمول ولیکئ.

له پورته فعالیت څخه پیدا کولای شو چې:

تعریف

مکعب مستطیل یو منظم هندسي شپږ وجهي جسم دی چې ټولې وجهې یې مستطیل شکل دي، او د سطحو مخامخ زاویې یې قایمه دي. که چېرې د مکعب مستطیل اوږدوالی په l، سور یې په w او ارتفاع یې په h سره وښیو، څرنګه چې مکعب مستطیل شپږ سطحې لري او د هرې سطحې مساحت یې په لاندې ډول دی:



د جانبي سطحو مساحت یې مساوي دی له: $S = 2(w \cdot h + h \cdot \ell)$

دقاعدو مساحت یې مساوي دی له:

$B = 2w \cdot \ell$

د مستطیلي مکعب کلي مساحت $A = w\ell + \ell h + wh + w\ell + \ell h + wh$

یا $A = 2(\ell w + \ell h + wh)$

هغه مکعب مستطیل چې ټولې ضلعې یې له یو بل سره مساوي وي، مکعب بلل کېږي. که چېرې مساحت په A سره وښیو، لرو چې:

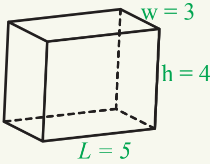
د مکعب کلي مساحت $A = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2$

$A = 6a^2$

هغه مکعب چې اوږدوالی، سور او ارتفاع یې یو وي. واحد مکعب بلل کېږي.

لومړی مثال: د مستطیلي مکعب کلي مساحت پیدا کړئ، په داسې حال کې چې اوږدوالی یې 5cm، سور یې 3cm او ارتفاع یې 4cm وي.

حل:



$\ell = 5cm$

$w = 3cm$

$h = 4cm$

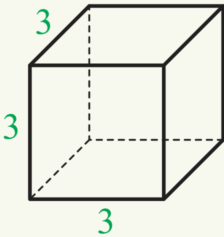
$A = 2(\ell w + \ell h + wh) = 2(5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 4)$

$A = 2(15 + 20 + 12) = 2(47)$

کلي مساحت $A = 94cm^2$

دویم مثال: که چېرې د یوه مکعب کلي مساحت 54cm وي، ددې مکعب د ضلعو اوږدوالی پیدا او رسم یې کړئ.

حل:



$A = 6a^2 \qquad 6a^2 = 54$

$a^2 = \frac{54}{6} = 9 \qquad a = 3cm$

فعالیت

- د واحد مکعبونو په درلودلو، مستطیلي مکعب چې اوږدوالی $3cm$، سور یې $2cm$ او ارتفاع یې $2cm$ وي، رسم کړئ.

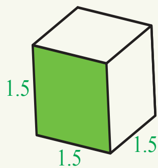
• د څو واحده مکعبونو په درلودلو سره کولای شو دا مکعب مستطیل ډک کړو. د جوړ شوی شکل حجم څومره دی؟
• که چېرې د نوموړي مستطیلي مکعب مخ بیا په ترتیب سره د نورو واحد مکعبونو په واسطه ډک کړو څه ډول شکل په لاس راځي؟ د هغه حجم به څومره وي؟
• د مکعب مستطیل د اوږدوالی، سور او ارتفاع په منځوکې څه ډول اړیکې شته چې د هغه په واسطه یې حجم پیدا کړو؟
• که چېرې د واحد مکعب لس نور کتارونه د لومړی مکعب مستطیل په منځ یا څنګ کې کېږدو د جوړ شوي شکل حجم څومره دی؟
• آیا کولای شی د مکعب مستطیل دحجم د محاسبې کولو لپاره فارمول وښیاست؟

له پورتنی فعالیت څخه پوهېږو چې:

د هغه مکعب مستطیل حجم چې اوږدوالی یې l، سور یې w او ارتفاع یې h وي مساوي دی له:

د مکعب مستطیل حجم $v=l\times w\times h$

د مکعب حجم $V=a\times a\times a=a^3$



لومړی مثال: د مخامخ مکعب حجم پیدا کړئ:

حل:

$$V=a\times a\times a=a^3$$

$$V=1.5\times 1.5\times 1.5$$

د مکعب حجم $V=3.375cm^3$

دویم مثال: د یوه مکعب مستطیل حجم 24 متر مکعب او د قاعدې مساحت یې 8 متره مربع دی ددې مکعب مستطیل ارتفاع څو متره ده.

حل:

د مکعب مستطیل حجم $v=l\times w\times h$

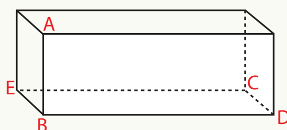
$$24=8\times h$$

$$h=24\div 8=3\,m$$

تاسو پوهېږئ په هر مکعب مستطیل کې هغه ټوټه خط چې د مکعب مستطیل دوه مخامخ راسونه یو له بل سره نښلوي د مکعب مستطیل قطر بلل کیږي. ددې د لاس ته راوړلو لپاره لاندې فعالیت سرته ورسوئ.

فعالیت

• په درکړ شوي شکل کې $\overline{AB}$, $\overline{BE}$ او $\overline{EB}$ اوږدوالي په ترتیب سره a,b او c ونوموئ.
• د A راس له C او د C له B سره ونښلوئ، تر څو یو قایم الزاویه مثلث جوړ شي.
• په شکل کې د ABC د قایم الزاویه مثلث وتر $\overline{AC}$ دی، د $\overline{AC}$ د پیدا کولو لپاره د فیثاغورث



له قضيي څخه کار واخلئ.
- ځرنګه چې د يو مکعب مستطيل ټولې سطحې مستطيلي دي
او يو پر بل باندې انطباق منونکې دي، نو: $\overline{BE} = \overline{DC} = ?$
- همدارنګه د BCD په قايم الزاويه مثلث کې $\overline{BC}$ وتر دی.
د فيثاغورث د قضيې په کارولو سره د $\overline{BC}$ اوږدوالی پيدا او په مخکنۍ رابطه کې د $\overline{BC}$ په ځای کيږدئ.
د پورته فعاليت څخه لرو:

$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

که چيرې په يوه مکعب مستطيل کې a=b=c وي، نو د مکعب قطر په لاس راځي.

$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} \Rightarrow \overline{AC} = a\sqrt{3}$$

مثال: د مکعب مستطيل د قطر اوږدوالی پيدا کړئ چې ابعاد يې په ترتيب 3cm ، 2cm او 6cm وي.

حل: که چيرې $a = 2cm$, $b = 3cm$ او $c = 6cm$ وي د $\overline{AC}$ د قطر اوږدوالی په لاس راوړو

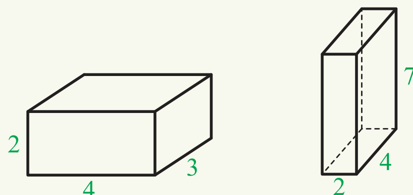
$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7cm$$

تمرين

1- د ډبرو د يوه ديوال اوږدوالی 60cm، سور يې 30cm او ارتفاع يې 120cm ده. د هغه حجم په سانتي متر مکعب سره پيدا کړئ.

2- که چيرې د يوه مکعب اوږدوالی سور او ارتفاع يې 3 برابره شي، د مکعب حجم څو برابره کيږي؟

3 - دلاندې مکعب مستطيلونو حجم او کلي مساحت په لاس راوړئ.



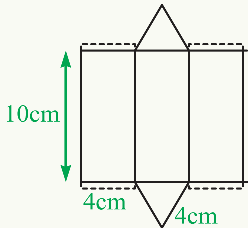
4 - که چيرې د يوه مکعب اوږدوالی سور او ارتفاع دوه برابره کړو د هغه د قطر اوږدوالی څه ډول بدلون مومي.

د منشور مساحت او حجم
Surface Area and Volume of Prisms



آیا تر اوسه مو فکر کړی دی د ژوند کولو خیمه څه ډول هندسي شکل لري؟

فعالیت



مخامخ شکل په درکړل شوو اندازو سره په یوه کاغذ باندې رسم کړئ. د کاغذ له شکل څخه د پریکولو او جلا کولو وروسته جلا شوي ټوټې په ترتیب یو د بل تر څنگ داسې کېږدی چې ونښلول شي.

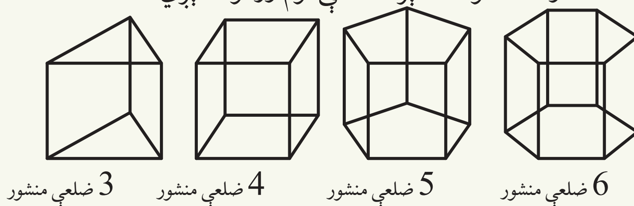
- جوړ شوی شکل کوم هندسي شکل دی؟
- په پورتني شکل کې څو سطحې او څو قاعدې لیدلای شی؟
- د پورتنیو هر یوه مساوي مستطیلونو مساحت په لاس راوړئ.
- د پورته دوو قاعدو د مثلثونو مساحت پیدا کړئ.
- د پورته دوو لاس ته راغلي مساحتونو مجموعه څه شی را ښیي؟

له پورته فعالیت څخه پیدا کولای شو چې:

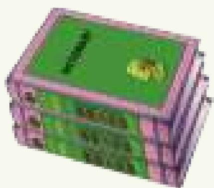
تعریف

منشور یو هندسي منظم جسم دی چې مخامخ جانبي سطحې یو له بل سره مساوي او موازي دي او د مخامخ جانبي سطحو زاویې یو پر بل باندې انطباق منونکي دي.
د منشور جانبي سطحې مستطیل شکله دي او د نوموړو مستطیلونو د مساحت مجموعه د منشور د جانبي سطحې مساحت بلل کېږي. په یوه منشور کې د جانبي سطحو د مساحت له جمع کولو څخه د ټول جانبي مساحت په لاس راځي او د ټول جانبي مساحت او دوو قاعدو د مساحت له جمع کولو څخه د منشور کلي مساحت لاس ته راځي. که چېرې د منشور سطحې پر قاعده باندې عمود وي هغه ته قایم منشور ویل کېږي.

منشورونو ته د قاعدو د ضلعو د شمېر له مخې نوم ورکول کېږي.



خپل او د خپل ټولګیوالو د رياضي کتابونه واخلئ او په لاندې توګه يې يو پر بل باندې کېږدئ جوړ شوی شکل يو مستطيل القاعده منشور دی. د مکعب مستطيل حجم د کتابونو له مجموعې سره مساوي دی. يا په بل عبارت د قاعدې مساحت ضرب په ارتفاع کې دی. که چېرې اوس د رياضي کتابونو په ځای چې مستطيل شکل دی خپل ګونياګانې يو بر بل باندې کېږدی يو مثلث القاعده منشور لاس ته راځي. چې ددې شکل حجم هم د قاعدې د مساحت او ارتفاع د ضرب سره مساوي دی. $V=B\times h$ چې په هغه کې B د قاعدې مساحت او h ارتفاع ده.



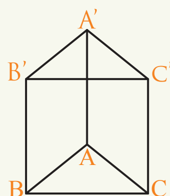
مثال: د مثلث القاعده منشور کلي مساحت او حجم پيدا کړئ په داسې حال کې چې قاعده يې يو متساوي الاضلاع مثلث چې د هرې ضلعې اوږدوالی $2cm$ او ارتفاع يې $4cm$ دی.

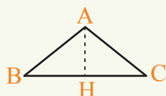
حل: په لومړي ګام کې د منشور د قاعدې د مثلث ارتفاع يعنې $\overline{AH}$ پيدا کوو:

$$\overline{AH}^2=\overline{AC}^2-\overline{CH}^2\Rightarrow\overline{AH}^2=(2^2)-(1)^2\Rightarrow\overline{AH}=\sqrt{3}$$

$$\text{د هرې جانبي سطحې مساحت}=2\times4=8cm^2$$

$$\text{د درېو جانبي سطحو مساحت}=3\times8=24cm^2$$





$$\text{دمنشورد قاعدې مساحت}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

$$\text{د دواړو قاعدو مساحت}=2\sqrt{3}$$

د قاعدو مساحتونه + دجانبي سطحو مساحتونه = ټول مساحت

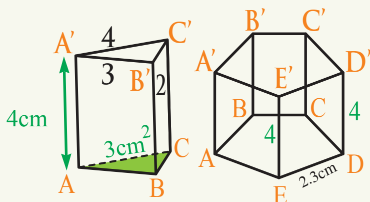
$$\text{ټول مساحت}=24+2\sqrt{3}$$

$$V=B\cdot h=4\sqrt{3}$$

تمرين

1- دمخامخ منشورونو کلي مساحت او حجم حساب کړئ په داسې حال کې چې:

$S_{(ABC)}=3cm^2$ ، $S_{(ABCD)}=12.92cm^2$



د استوانې مساحت او حجم



ډېر هغه وسایل چې په ورځنی ژوند کې ورسره مخامخ کېږو، استوانه یي شکلونه دي، لکه: د اوبو ګیلاس، د اوبو نل او نور...
آیا کولای شئ د څو نورو استوانه یي شکلو شیانو نومونه واخلئ؟

فعالیت

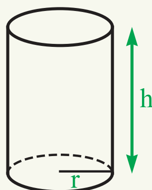
د یوې قایمې استوانې د ارتفاع اوږدوالی 5cm او د قاعدې شعاع یې 2cm ده د ارتفاع په اوږدوالي استوانه خلاصه او رسم یې کړئ.

- د لاس ته راغلي مستطیل اوږدوالي او سور څومره دی؟
- د مستطیل مساحت لاس ته راوړئ.
- ددې مستطیل مساحت د استوانې د جانبي سطحې له مساحت سره څه ډول اړیکې لري؟
- د استوانې د هرې قاعدې مساحت په داسې حال کې په لاس راوړئ چې د قاعدې شعاع یې 2cm وي؟
- د استوانې کلي مساحت حساب کړئ.

له پورته فعالیت څخه ویلای شو:

تعریف

قایمه استوانه له دوو انطباق منونکو دایروي قاعدو او یوې جانبي سطحې څخه چې پر قاعدو باندې عمود ده، جوړ شوې ده. که چېرې د هغې ارتفاع په h او د قاعدې شعاع یې په r سره وښیو، نو د هغې ټول مساحت په A سره ښیو:



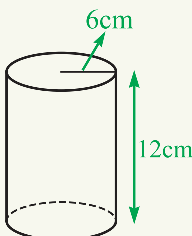
د جانبي سطحې مساحت $s = 2\pi r \cdot h$

د قاعدو مساحت $= 2\pi r^2$

د استوانې کلي مساحت $A = 2\pi r^2 + 2\pi r \times h$

$\pi = 3.14$ $A = 2\pi r(r + h)$

لومړی مثال: د مخامخ استوانې مساحت حساب کړئ.



حل:
$$A = 2\pi r(r+h) = 2\times 3.14(6)(6+12)$$
$$A = 6.28\times 6(18) = 37.68(18)$$
$$A = 678.24cm^2$$

یادونه: د منشور د حجم د پیداکولو لپاره مو لومړی د قاعدې مساحت پیدا او بیا هغه په ارتفاع کې ضربوو د استوانې د حجم د پیداکولو لپاره هم لومړی د دایروي قاعدې مساحت پیدا او بیا هغه په ارتفاع کې ضربوو که چیرې د استوانې حجم په V سره وښیو نو لرو چې: $V = \pi r^2 \times h$

دویم مثال: که چیرې د یوه 4 سلندره ماشین حجم چې د هر سلندر قطر یې 8cm دی له $1600cm^3$ سره مساوي وي د هر سلندر ارتفاع څومره ده؟

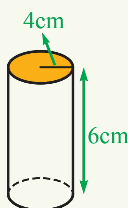
حل: څرنګه چې r=4cm، $V=1600cm^3$ دي، نو h=? ، له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د 4 سلندرو لپاره لرو:

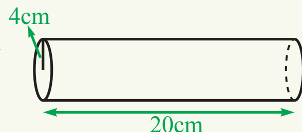


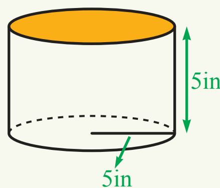
$$v = (4\pi r^2 \cdot h)$$
$$1600 = 4(16\pi\cdot h) = 4(16\cdot 3.14\cdot h)$$
$$1600 = 200.96h$$
$$h = \frac{1600}{200.96} = 7.96 \qquad h = 7.96cm$$

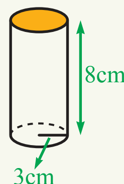
تمرین

1- دلاندې هرې یوې استوانې کلي مساحت او حجم حساب کړئ:









2- که چیرې د یوې استوانې د قاعدې شعاع 3 برابره شي د هغې په حجم کې څومره بدلون راځي؟

3- د اوبو ذخیره چې استوانه یې شکل لري د قاعدې شعاع یې 5m او ارتفاع یې 8m دي. د اوبو په نوموړي ذخیره کې څو متره مکعبه اوبه ځاییږي؟

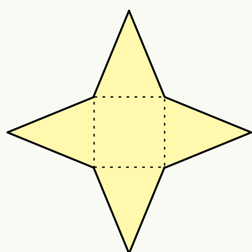
4- که چیرې د یوې استوانې ارتفاع دوه برابره شي د جانبي سطحې اندازه یې څومره بدلون مومي؟

د هرم مساحت او حجم



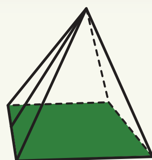
آیا تر اوسه مو فکر کړی چې مصریانو د مصر هرمونه په څو کلونو کې جوړ کړي دي؟

فعالیت



- مخامخ شکل د کاغذ پر مخ رسم کړئ.
- که چېرې د مثلثونو راسونه یو له بل سره ونښلوی څه ډول شکل په لاس راځي؟
- د شکل له مخې آیا کولای شئ د هرم د جانبي سطحو د مساحت د پیداکولو لپاره یوه طریقه بیان کړئ؟

له پورته فعالیت څخه لرو چې:

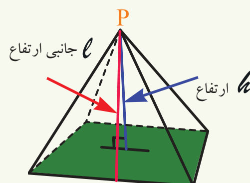


تعریف

هرم یو هندسي څو وجهي شکل دی چې قاعده یې یوه مضلع او جانبي سطحې یې مثلثونه دي او یو ګډ راس لري.

$S=\frac{1}{2}n.b.l$ د جانبي سطحو مساحت

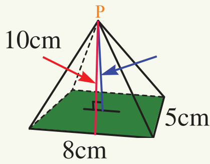
دلته n د ضلعو شمېر، b د هغه مثلث قاعده ده چې جانبي ارتفاع وربانديې رسم کېږي او l جانبي ارتفاع (د مثلث ارتفاع) ده. د هرم ارتفاع له هغه توږه خط څخه عبارت ده چې د هرم له راس څخه د هغه په قاعده باندې عمود وي.



د جانبي سطحو مساحت + د قاعدې مساحت= د هرم کلي مساحت

یا $A=B+S$

مثال: په لاندي شکل کې د هرم اوږدوالی سور او جانبی ارتفاع درکړ شوي دي د هغه کلي مساحت پیدا کړئ.



حل: پوهیږو چې د هرم قاعده مستطیلی ده او څلورضلعي لرى، نو:

$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8cm \cdot 10cm \quad , \quad S = 160cm^2$ د هرم د جانبي سطحو مساحت

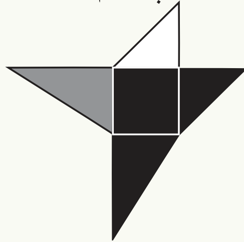
$B = 8cm \cdot 5cm = 40cm^2$ د هرم د قاعدې مساحت

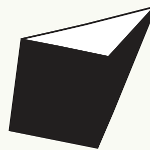
$A = S + B \Rightarrow A = 160cm^2 + 40cm^2$ د هرم کلي یا ټول مساحت

$\Rightarrow A = 200cm^2$

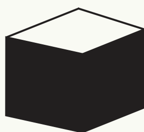
فعالیت

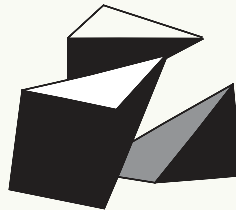
- دري تختې کاغذونه په پام کې ونیسئ او لاندې شکل په هر یوه کې رسم کړئ.





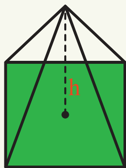
- دري واړه سپیني تختې کاغذونه پرې کړئ او له هغو څخه دري هرمونه جوړ کړئ.
- جوړ شوي هرمونه یو د بل تر څنګه داسې کېږدئ چې یو مکعب په لاس راشي.
- د هرم اومکعب حجمونه یو له بله سره پرتله کړئ.





له پورته فعالیت څخه لرو چې:

د مکعب مستطیل حجم د هرم د حجم 3 برابره دی، نو د هرم حجم د مکعب مستطیل دحجم یو دریمه دی.



نو که چېرې د هرم حجم په V ارتفاع يې په h او د قاعدې مساحت يې په B سره وښيو، نو د هرم حجم مساوي دی له:

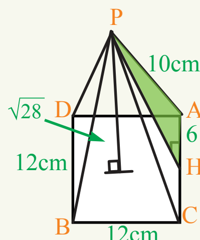
$$V = \frac{1}{3} B \cdot h$$

مثال: په لاندې مربع القاعده هرم کې د قاعدی د ضلعې اوږدوالی او د هرم ارتفاع يې درکړل شوي دي د هرم کلي يا ټول مساحت او حجم حساب کړئ.

حل: څرنګه چې د هرم قاعده مربع ده، نو مساحت يې عبارت دی له.

$$B = a^2 \Rightarrow B = 12 \cdot 12 = 144cm^2$$

اوس د AHP په قايم الزاويه مثلث کې $\overline{PH}$ چې د $\overset{\Delta}{APC}$ مثلث ارتفاع ده، په لاس راوړو.



$$\overline{PA}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{PH}^2$$

$$10^2 = 6^2 + \overline{PH}^2 \Rightarrow \overline{PH} = l = 8cm$$

$$S = \frac{1}{2} n \cdot b \cdot l$$

د هرم څلور واړه سطحې له مثلثونو څخه جوړې شوي دي.نو:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12cm \cdot 8cm$$

$$S = 4 \times \frac{1}{2}(12 \times 8)cm^2$$

$$= 2(96)cm^2 = 192cm^2$$

د هرم کلي مساحت $A = 192 + 144 = 336cm^2$

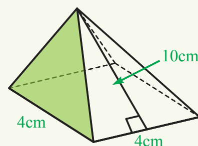
$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$$
$$V = \frac{1}{3} 144 \cdot \sqrt{28}$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot 144cm^2 \cdot 5.29cm$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot 761.76cm^3$$
$$V = 253.92cm^3$$

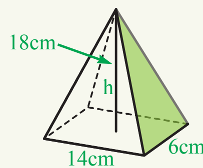
تمرين

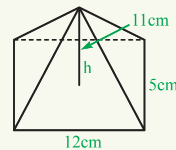
1- د هغه هرم حجم پیدا کړئ چې قاعده یې مربع او د مربع د ضلعې اوږدوالی یې 40m او د هرم ارتفاع 27m وي.

2- یوه خیمه د مربع القاعده هرم شکل لري په دې خیمې کې څو متره مکعب هوا وجود لري؟ په دې صورت کې چې د مربع د ضلعې اوږدوالی 7m او د هرم ډوله خیمې ارتفاع 5m وي.

3- د لاندې شکلونو هر یوه حجم پیدا کړئ:







د مخروط مساحت او حجم



آیا تر اوسه مو فکر کړی دی چې یو مخروط د یوې ضلعې په شاوخوا د کوم ډول مثلث له دوران څخه منځ ته راځي؟

تعریف

قایم مخروط داسې جسم دی چې په یوې قایمې ضلعې باندې د یوه قایم الزاویه مثلث له دوران څخه لاسته راځي، هغه توپه خط چې د مخروط راس د هغه د قاعدې له مرکز سره نښلوي د مخروط محور بلل کېږي. که چېرې محور په قاعدې باندې عمود وي قایم مخروط دی له هغه پرته مایل مخروط بلل کېږي د مخروط مساحت د لاندې فرمول په واسطه په لاس راځي چې l په کې د مخروط د مولد خط اوږدوالی دی: $B = \pi r^2$ د قاعدې مساحت

$A = B + S = \pi r^2 + \pi r \cdot l = \pi r(r + l)$ $S = \pi r \cdot l$ د یوې جانبي سطحې مساحت

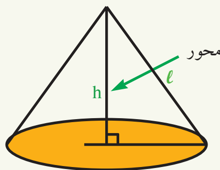
فعالیت

- یوه استوانه یي ډوله او یو مخروطي ډوله جسمونه چې قاعدې یې یو له بل سره مساوي وي له کاغذ څخه جوړ کړئ، مخروطي جسم له ریګ څخه ډک او په استوانه یي جسم کې یې تش یعنې واچوئ.
- د څو ډکو مخروطونو په واسطه استوانه یي جسم په بشپړه توګه ډکېږي.
- د استوانې او مخروط حجمونه یو له بل سره څه ډول اړیکې لري؟

له پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

لیدل کېږي چې د استوانې حجم د مخروط 3 برابره دی، نو د مخروط حجم د استوانې د حجم یو دریمه دی،

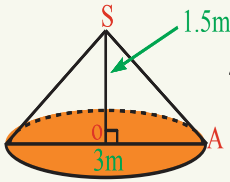
د مخروط حجم $V = \frac{1}{3}$ د استوانې حجم



ځرنګه چې: $\pi r^2 h$ د استوانې حجم دی

نو د مخروط حجم یعنې: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h$

لومړی مثال: د غنمو يو درمند د مخروط شکل لري چې ارتفاع يې $1.5m$ او د قاعدې قطر يې $3m$ دی. د هغه کلي مساحت پيدا کړئ.



حل: $r = 1.5m$, $d = 3m$, $h = 1.5m$

څرنګه چې د مخروط قاعده دايروي ده، نو:

$$B = \pi r^2 = 3.14(1.5)^2 = 7.065m^2$$ د قاعدې مساحت

اوس د جانبي سطحې د پيداکولو لپاره بايد د قايم الزاويه مثلث وتر پيدا کړو:

$$\overline{SA}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OS}^2$$

$$\overline{SA}^2 = (1.5m)^2 + (1.5m)^2 = 4.5m^2$$

$$\overline{SA} = 2.12$$

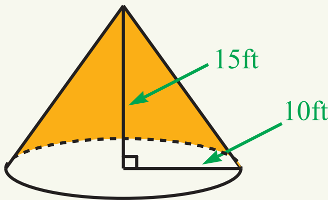
$$S = \pi r \ell = 3.14 \times 1.5 \times 2.12$$

$$S = 4.17 \times 2.12 = 9.9852m^2$$

$$A = B + S = 7.065 + 9.9852 = 17.0502m^2$$ کلي مساحت

دويم مثال: د لاندې مخروط حجم د درکړ شوو قيمتونو له مخې حساب کړئ:

$h = 15 ft$, $r = 10 ft$



حل:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h = \frac{1}{3} \times 3.14(10)^2 \times 15$$

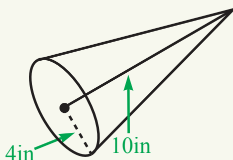
$$V = \frac{1}{3} \times 4710 = 1570$$

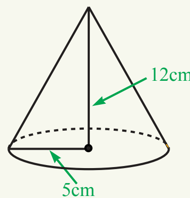
$$\boxed{V = 1570\ ft^3}$$

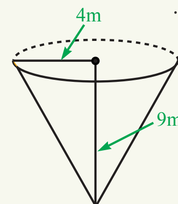
تمرين

1- د شګو يوه کوټه يا ډېرى مخروطي شکل لري چې ارتفاع يې $2m$ او د قاعدې قطر يې $4m$ دی، د شګو حجم پيدا کړئ.

2- په لاندې شکلونو کې د هر مخروط د قاعدې شعاع او ارتفاع درکړ شوي دي د هر يوه حجم حساب کړئ.







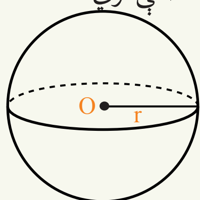


د کرې مساحت او حجم

آیا ستاسو په چاپېریال کې داسې شکلونه او جسمونه شته چې دایروي یا کروي شکل ولري؟ نمونه یې واخلئ.

تعریف

کره داسې جسم دی چې د هغې ټولې نقطې له یوې ثابتې نقطې څخه مساوي فاصلې لري.



ثابتې نقطې ته د کرې مرکز، له مرکز څخه د هغې تر سطحې پورې ثابتې فاصلې ته د کرې شعاع (r) وایي. که چېرې د کرې مساحت په A او حجم یې په V سره وښیو، نو لیکلای شو:

$$A = 4\pi r^2 \quad \text{د کرې مساحت}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{د کرې حجم}$$

لومړی مثال: د هغې کرې سطحې مساحت او حجم پیدا کړئ چې قطر یې $10cm$ وي.

حل:

$d = 10cm$

$r = \frac{d}{2} = \frac{10cm}{2} = 5cm$

د کرې مساحت:

$A = 4\pi r^2 = 4 \times 3.14 \times (5)^2$

$= 12.56 \times 25 \Rightarrow A = 314cm^2$

د کرې حجم:

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (5)^3$

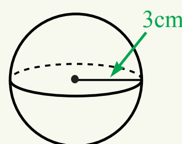
$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 125 = \frac{4}{3} \times 392.5$

$= \frac{1570}{3} = 523.33cm^3$

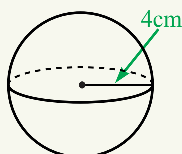
$V = 523.33cm^3$

دويم مثال: په لاندي شکلونو کې د هرې کرې حجم د درکړ شوو قيمتونو له مخې پيدا کړئ:

a جزشکل



b جز شکل



حل a:

$$r = 3 \quad , \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (3)^3$$

$$V = \frac{4}{3} \times 3.14 \times 27 = \frac{4}{3} \times 84.78 \quad \Rightarrow \quad V = 113.04 cm^3$$

حل b:

$$r = 4 \quad , \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (4)^3$$

$$V = \frac{4}{3} \times 3.14 \times 64 = \frac{4}{3} \times 200.96 \quad \Rightarrow \quad V = 267.946 cm^3$$

تمرين

1- ديوې کرې مساحت 36π سانتي متر مربع دی.

الف: ددې کرې شعاع په لاس راوړئ.   ب: د کرې حجم حساب کړئ.

2- په لاندې جدول کې د کرې شعاع درکړ شوې ده د کرې حجم او مساحت پيدا کړئ او د جدول په تشو ځايونو کې يې وليکئ:

r	6cm	$6 \times \frac{3}{4} cm$	9cm	12cm	314cm
A					
V					

3-که چېرې د کرې شعاع 2 برابره شي، په حجم او مساحت کې څه ډول بدلون راځي؟

• مکعب مستطیل

مکعب مستطیل یو منظم هندسي شپږ وجهي جسم دی چې ټولې وجهې یې مستطیل شکل دي، او د سطحو مخامخ زاویې یې قایمه دي. که چېرې د مکعب مستطیل کلي مساحت په A او حجم یې په V سره و ښیو په دې صورت کې لیکلای شو:

$$A = 2(lw + lh + wh)$$

$$v = l \times w \times h$$

• مکعب

هغه مکعب مستطیل چې د هغه ټولې ضلعې یو له بل سره مساوي په a وي مکعب بلل کېږي. که چېرې د هغه مساحت په A او حجم یې په V سره وښیو، نو لرو چې:

$$A = 6a^2$$

$$V = a^3$$

• منشور

منشور یو هندسي منظم جسم دی چې مخامخ سطحې یې یو له بل سره مساوي او موازي دي او د مخامخ سطحو زاویې یې یو په بل باندې انطباق منونکي دي.

• استوانه

قایمه استوانه له دوو انطباق منونکو دایروي قاعدو او له یوې جانبي سطحې څخه چې پرقاعدې باندې عمود وي جوړه شوې ده.که چېرې حجم یې په V او مساحت یې په A سره وښیو، نو لرو چې:

$$A = 2\pi r(r + h)$$

$$V = \pi r^2 \times h$$

• هرم

هرم یو هندسي څو وجهي شکل دی چې قاعده یې یوه مضلع او جانبي سطحې یې مثلثونه دي او په یوه راس کې ګډ دي.

د جانبي سطحو مساحت + د قاعدې مساحت = د هرم کلي مساحت

$$A=B+S$$

که چېرې د هرم حجم په V او ارتفاع یې په h او د قاعدې مساحت یې په B سره وښیو، نو لرو چې:

$$V = \frac{1}{3}B \times h$$

• مخروط

قایم مخروط داسې جسم دی چې په یوې قایمې ضلعې باندې د یوه قایم الزاویه مثلث له دوران څخه لاس ته راځي، هغه ټوټه خط چې د مخروط راس د هغه د قاعدې له مرکز سره نښلوي د مخروط

محور بلل کېږي. که چېرې محور په قاعدې باندې عمود وي، قايم مخروط او له هغه پرته مايل مخروط بلل کېږي.

که چېرې د مخروط کلي مساحت په A او حجم يې په v سره وښيو نو لرو:

$$A = \pi r^2 + \pi r \times \ell$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h$$

• کـره

کره هغه جسم دی چې د هغې ټولې نقطې له يوې ثابتې نقطې څخه مساوي فاصلې ولري. ثابتې نقطې ته د کرې مرکز وايي، که چېرې دکرې مساحت په A او حجم يې په V سره وښيو. ليکلی شو:

$$A = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

عمومي پوښتنې

• د لاندې هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه درکړ شوي دي له هر سم ځواب شخه کرښه تاو کړئ.

1- د استوانې محور له قاعدې سره لاندې زاويې جوړوي:

a) حاده b) منفرجه

c) قايمه d) a او b سم دي.

2- د هرم ارتفاع هغه ټوټه خط دی چې له راس شخه پرقاعدې باندې:

a) موازي دی b) مايل دی

c) عمود دی d) يو يې هم نه دی

3- که چېرې د يوه مخروط ارتفاع چې قاعده يې دايروي وي $20cm$ او د قاعدې شعاع يې $10cm$ وي حجم يې مساوي دی له:

a) $2093.3cm^3$ b) $2093.3cm^2$

c) $209.33cm^2$ d) $209.33cm^3$

4- که چېرې د يوه مکعب مستطيل اوږدوالی، سور او ارتفاع يې په ترتيب 3، 2 او 1 سانتي متره وي د هغه د CA قطر اوږدوالی عبارت دی، له:

a) 2 b) $\sqrt{14}$

c) $\sqrt{1}$ d) 6

5- هغه فضا چې د يوه جسم په واسطه نيول کېږي په کوم نامه يادېږي:

a) د جسم وزن b) د جسم حجم

c) د جسم کتله d) درې واړه صحيح دي.

• لاندې تش ځايونه په مناسبو کلمو سره ډک کړئ:

1- هغه مکعب مستطيل چې اوږدوالی، سور او ارتفاع يې سره مساوي دي له .... عبارت دی.

2- مکعب مستطيل يو منظم هندسي.................. دی چې ټولې .... د سطحو مخامخ .... قايمه دي.

3- قايم استوانه داسې جسم دی چې له دوو انطباق منونکو..................... قاعدو او .... باندې عمود دي جوړه شوې ده.

4- دهرم حجم د .... د حجم ځومه.......... ده چې د عينې قاعدې او ...... لرونکي وي.

5- قايمه مخروط هغه جسم دی چې په يوه .... د يوه .... مثلث له دوران شخه لاس ته راځي.

• له لاندې جملو شخه کومه يوه سمه او کومه يوه غلطه ده؟ د سمې مخې ته د (ص) توری او د غلطې مخې ته د(غ) توری وليکئ:

1- ( ) په يوه منشور کې د ټولو سطحو د مساحتونو او قاعدو دمساحتونو له جمع کولو شخه

جانبي سطح په لاس راځي.

2- (   ) که چېرې استوانه د محور په اوږدوالي سره قطع او خلاصه شي یو هرم لاس ته راځي.

3- (   ) که چېرې د مکعب مستطیل اوږدوالی a، بر یې b او ارتفاع یې c وي د نوموړي مکعب مستطیل حجم له abc څخه عبارت دی.

4- (   ) کره هغه جسم دی چې دهغې ټولې نقطې له یوې ثابتې نقطې څخه مساوي فاصلې ولري.

5- (   ) د مخروط حجم د استوانې حجم $\frac{1}{5}$ برخه ده په دې صورت کې چې د هماغه قاعدې او ارتفاع لرونکي وي.

• لاندې پوښتنې حل کړئ.

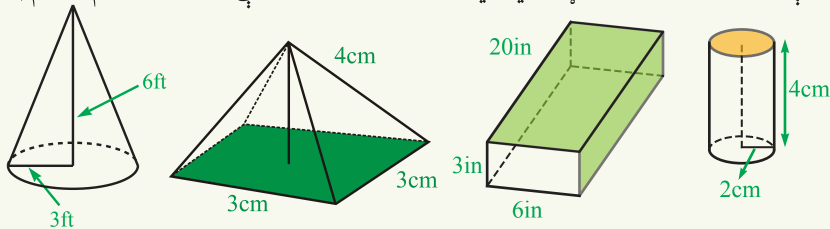
1- د مکعب کلي مساحت او حجم پیدا کړئ چې د راس خط (ارتفاع) یې په لاندې توګه درکړل شوي ده

$a)\ 24m \qquad b)\ \sqrt{9}m \qquad c)\ 3\frac{3}{5}m \qquad d)\ 4\sqrt{27}$

2- د پوډرې شیدو قوطی استوانه یې شکل لري چې د قاعدې شعاع یې $6cm$ او ارتفاع یې $12cm$ ده. د نوموړې قوطی کلي جانبي مساحت او حجم پیدا کړئ.

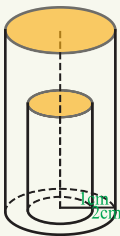
3- په مربع القاعده خیمه کې څو متره مکعبه هوا شته، په داسې حال کې چې د خیمې د هرم د مربع د ضعلې اوږدوالی او ارتفاع $5m$ وي.

4- دلاندې جسمونو شکلونه درکړ شوي دي د هغو د قیمتونو له مخې د هر یوه جسم حجم پیدا کړئ.



5- دوې کرې په ترتیب د $1cm$ او $2cm$ شعاع لرونکي دي.

الف: د هرې یوې مساحت پیدا کړئ.   ب: د هرې یوې حجم پیدا کړئ.



6- د مخامخ شکل په توګه دوه قایمې استوانې په پام کې ونیسئ چې د قاعدو مرکز یې یو (عیني مرکز) وي.

الف: د لویې استوانې او کوچنۍ استوانې د جانبي سطحو د مساحتونو نسبت پیدا کړئ.

ب: د لویې استوانې او کوچنۍ استوانې د حجمونو نسبت څومره دی.

7- ځمکه چې کابو کروي ده. که چېرې د ځمکې شعاع 6400 کیلو متره وي.

الف: د ځمکې مساحت حساب کړي.   ب: د ځمکې حجم حساب کړئ.

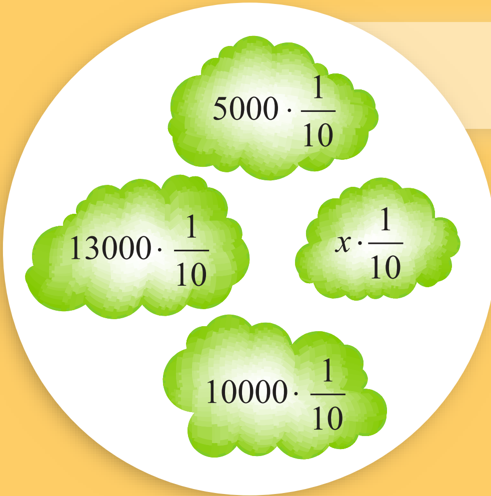
اووم فصل

الجبري افادي

$(5-2)n+(8-7)s=3n+s$

د متحول مفهوم

يو شته من غواړي د خپلو عوایدو $\frac{1}{10}$ بېوزلو ته ورکړي. دا خبره د رياضي له مخې څنګه بيانولای شو؟



فعاليت

لاندې جدول بشپړ کړئ:

د مربع د ضلعې اوږدوالی	2	1	3	10	$\frac{1}{10}$	9
د مربع محيط	4×2					
د مربع مساحت			3×3			

- $4 \times a$ يعنې څه؟ د $4 \times a$ د ساده کولو لپاره په $4a$ سره ښيو.
- آياکولای شو د هرې مربع مساحت د a^2 په شکل سره وښيو؟
- آياکولای شو د مربع د مساحت د ښودلو لپاره له نورو تورو څخه کار واخلو؟
- که چېرې محيط (چاپېريال) په P او مساحت په S سره وښيو د مربع د مساحت او محيط د پيدا کولو لپاره قاعدې پيدا کړئ.
- د a په ځای د 4 په اېښودلو سره چې 4 د مربع د ضلعې اوږدوالی وښيي د مربع محيط او مساحت پيدا کړئ.
- آياکولای شو د a په ځای بل هر مثبت عدد وليکو؟ دا مثبت عدد څه راښيي؟

له پورته فعاليت څخه ليکلای شو:

کولای شو د قاعدې او قانون د بيانولو لپاره له تورو څخه کار واخلو څرنګه چې د تورو په ځای مختلف قيمتونه ليکلای شو، نو دغه ډول توري متحول بلل کېږي.

لومړی مثال: د a او 5 عدد جمع کولو څخه یوه افاده ولیکئ او د 5 , -3 , $a = 2$ لپاره د افادې قیمتونه پیدا کړئ.

حل: نوموړي افاده د $a+5$ څخه عبارت ده چې د a مختلفو قیمتونو لپاره لاندې جدول بشپړ وو.

a	2	– 3	5
a + 5	2 + 5 = 7	– 3 + 5 = 2	5 + 5 = 10

دویم مثال: هر یو عدد چې په خپل ځان کې ضرب شي د ضرب حاصل یې د 2 په توان له همغه عدد سره مساوي وي. دا عبارت د یوې افادې په شکل ولیکئ او په دوو مثالونو کې وښیاست.

حل: د تورو افاده یې عبارت ده، له: $a \times a = a^2$

که چېرې $a = 2$ وي نو: $2 \times 2 = 2^2 = 4$ دی.

که چېرې $a = \frac{1}{2}$ وي نو: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

تمرین

لاندې جملې د مناسبو تورو په ټاکلو سره د تورو د افادو په شکل وښیاست او د هر یوه لپاره 3 عددي مثالونه ولیکئ.

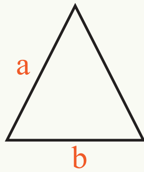
- هر عدد د یو په توان مساوي دی له خپل هم هغه عدد سره.
- یو د هر عدد په توان مساوي دی له یوه سره.
- هر عدد د صفر په توان مساوي دی له یوه سره.
- صفر د هر عدد په توان مساوي دی له صفر سره.
- د یوه مکعب د حجم اندازه مساوي ده د هغه د یوې ضلعې اندازه په توان د 3 سره.
- آیا کولای شئ د پورته رابطو په ډول نورې رابطې ولیکئ؟ دوه مثالونه راوړئ.

الجبري افادې



یوه بانک اعلان کړی دی چې د بانک د کلنۍ ربح نرخ 10% دی. ناصر له ځان سره فکر وکړ چې څومره پانګه د څومره وخت لپاره په بانک کې کېږدي چې له ګټې سره یې پانګه 2 برابره شي؟

فعالیت



- په مخامخ متساوي الساقین مثلث کې د ساق د ضلعې اندازه په a او قاعده یې په b سره ښیو، ولې دواړه ساقونه په a سره ښیو؟
- د مثلث محیط د یوې الجبري افادې په واسطه ولیکئ او محیط یې د $a = 4$ او $b = 5$ لپاره پیدا کړئ.
- د مستطیل محیط او مساحت د یوې الجبري افادې په شکل ولیکئ.
- د مستطیل مساحت او محیط د $w = \frac{3}{4}$ او $l = \frac{2}{3}$ لپاره پیدا کړئ.



له پورته فعالیت څخه لیکلای شو:

د $2a + b, 3a - b, a \cdot b, 4a, \frac{4a-b}{2}, \sqrt{4a}$ او a^2 افادې چې جمعې، تفریق، ویش، توان او جذر عملیو له ترکیب څخه چې پکې عددونه یو یا څو متحولین دي، جوړې شوې وي الجبري افادې بلل کېږي، کولای شو د یوې الجبري افادې قیمت د متحول د مختلفو قیمتونو لپاره پیدا کړو

لومړی مثال: د $2b$ الجبري افادې قیمت د 2 , -2 , -3 , 4 , $b = \frac{3}{2}$ لپاره پیدا کړئ.

حل:

b	2	4	-2	-3	$\frac{3}{2}$
2b	$2 \times 2 = 4$	$2 \times 4 = 8$	$2 \times (-2) = -4$	$2 \times (-3) = -6$	$2 \times \frac{3}{2} = 3$

دویم مثال: که چېرې د یوه بانک کلنۍ ربح %10 وي، هغه قاعده چې بانک یې پانګوالو ته د ربحې لپاره لري د الجبري افادې په شکل ولیکئ.
حل: که چېرې ربح په P ، پانګه په A ، بیه په R او وخت په T سره وښیو، نو لیکلای شو:

$$P = A \times R \times T$$

تمرین

1- د درکړل شوو قیمتونو له مخې د هرې الجبري افادې عددي قیمت پیدا کړئ.

a	2	-5	3
b	$-\frac{1}{2}$	9	5
$b(a+7)$			

x	1	6	-2
$x-\frac{1}{2}$			

2- پروین هره ورځ د تاریخ د کتاب څو مخه لولي. که چیرې پروین په یوه ورځ کې د کتاب x مخونه ولولی د هغو مخونو شمېر چې پروین یې په یوه ورځ کې لولي او د هغو مخونو شمېر چې پروین یې په یوه اونۍ کې لولي د یوې الجبري افادې په واسطه وښیاست.

د الجبري افادو ساده کول

مریمې وویل: ما دوه کتابچې درلودې. پلار مې نورې درې کتابچې راته راونیولې اوس 5 کتابچې لرم.
کبیر وویل: زه هم درې کتابچې لرم. پلار مې 2 قلمونه راته واخیستل، څه ویلای شم؟

x: کتابچه

y: قلم

$$2x + 3x = 5x$$

$$3x + 2y = ?$$

فعالیت

لاندې افادې ساده او بشپړې کړئ.

$5\times3+2\times3=(5+2)\times3=7\times3$

$8\times0.5-2\times0.5=(.....-.....)\times...=.....\times.....=.....$

$2 \quad +3 \quad =(.....+.....) \quad = ...$

$4 \quad +3 \quad +2 \quad =(.....+.....+.....) \quad =.....$

$2a+3a=(.....+.....)a=.....a$

$-3y+4y=(.....+.....)y=.....y$

$2ax+3ax=(.....+.....)\times ax=.....ax$

- د پورته افادو په ساده کولو کې له کوم خاصیت څخه کار اخیستل شوی دی؟
- آیا کولای شو د 2 + 3 افاده ساده کړو؟
- آیا کولای شو د $2b+3b$ افاده، ساده کړو؟

کولای شو له پورته فعالیت څخه داسې پایله تر لاسه کړو:

په پورته هره الجبري افاده کې $2ax$, $-3y$, $2a$ یو حده افاده بلل کېږي. هغه دوه حدونه چې د هغو توپیر یوازې په ضریبونو کې دی، یعني ضریبونه یې توپیر لري خو توري او توانونه یې یو ډول وي، مشابه حدونه بلل کېږي. د الجبري افادې د ساده کولو لپاره مشابه حدونه په پام کې نیسو او هغوی یو له بله سره جمع یا یو له بله څخه تفریقوو.

لومړی مثال: لاندې افادې ساده کړئ:

$$5n+8s-2n-7s=?$$

حل: څرنگه چې د $5n$ او $-2n$ توپیر یوازې د متحول په ضریبونو کې دي، نو مشابه حدونه دي په همدې ډول $-7s$ او $8s$ هم مشابه دي چې په لاندې ډول ښودل شوي دي:

$$5n+8s-2n-7s=(5-2)n+(8-7)s=3n+s$$

څرنگه چې s او $3n$ یو له بله سره مشابه نه دي له دې څخه زیات ساده کېدای نشي.

دویم‌مثال: د $5xy^2+4yz-8$ او $xy^2+3yz+8$ افادې جمع کړئ.

$$\begin{array}{r} 5xy^2+4yz-8 \\ +\quad xy^2+3yz+8 \\ \hline 6xy^2+7yz \end{array}$$

تمرین

1- لاندې افادې ساده کړئ:

a) $5a+7d-4a+3d$

b) $8c+3k+5k-8k$

c) $3d+2c+4d+3c-5d$

d) $4b-5-3b+2$

e) $9xy-7x+5-x^2+2xy+2x^2-2$

f) $3a^2-7a-2-5a^2+3a+17$

g) $\begin{array}{r} 3x^2+6xy+4y \\ +\ -x^2+4xy+9y \\ \hline \end{array}$

h) $\begin{array}{r} 3xy-2yz+4zx \\ +\ -2xy+yz+32zx \\ \hline \end{array}$

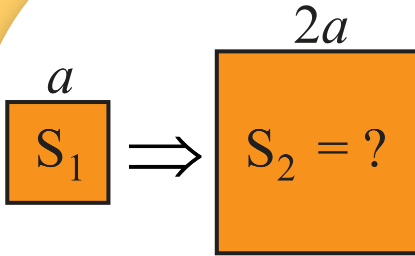
2- لاندې کومې افادې یو له بله سره مشابه دي:

a) $-4x^2y\ ,\ 2x^3y^3$

b) $3xy^2\ ,\ 8x^3y$

c) $3x^2\ ,\ 9x^2$

د یو حده افادو ضرب



د a ضلعې په اوږدوالي يوه مربع لرو که چېرې د مربع ضلعې دوه برابره شي د لومړي مربع پر دويمي مربع د مساحتونو نسبت څومره دی؟

فعالیت

لاندې تساوي ګانې په پام کې ونيسئ:

$$(3x^3y^2)\cdot(2x^2y)=(3\times 2)x^3y^2\cdot x^2y=6x^{3+2}y^{2+1}=6x^5y^3$$

$$(4a^2b)\cdot(6ab^2)=(4\times 6)a^2b\cdot ab^2=24a^3b^3$$

- د ضرب په دې حاصل کې د ضرب د عمليې له کوم خاصيت او د طاقتونو د ضرب له کومې قاعدې څخه کار اخيستل شوی دی؟
- د مساواتو د کيڼ لوري د حدونو عددي ضريبونه او د ښي لوري د حدونو عددي ضريبونه يو له بل سره څه ډول اړيکې لري؟
- د کيڼ لوري اوښي لوري په دوو الجبري افادو کې د هر يوه متحول توان يو له بل سره څه ډول اړيکې لري؟
- د پورته قواعدو په نظر کې نيولو سره لاندې افادې ساده کړئ. $3x^2y^3z^2\times 4x^2y^3z=\ldots$

$$-9x^3a^2\times\frac{1}{5}ya^3=\ \ldots$$

له پاسني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

خرنګه چې په پورتني فعاليت کې، لکه: $3x^3y^2, 2x^2y, 6ab^2, 4a^2b$ افادې د عدد او توان لرونکو متحولينو د ضرب څخه جوړ شوي دي، د يو حده او هغه عددونه چې په متحولينو کې ضرب شوي دي، د يو حده ضريب بلل کېږي.

د يو حده په ضربولو کې لومړی بايد د هغو ضريبونه يو له بل سره ضرب کړو او د مشابه متحولينو توانونه هم يو له بل سره جمع کوو.

لومړی مثال: د $6b^3$ او $-4ab$ الجبري افادې يو له بله سره ضرب کړئ.

حل: $(-4ab)(6b^3) = (-4\cdot 6)abb^3 = -24ab^4$

دويم مثال:په لاندې الجبري افادو کې کومه يوه يې يو حده ده؟

a) $\frac{4}{5}y^2x$

b) $4y^2x + 5$

c) $\frac{4y^2}{x}$

d) $\sqrt{xy}$

حل: (a) c او d هريو، يو حده دی، ځکه د يوه عدد او توان لرونکو متحولينو له ضرب څخه جوړې شوي دي.

تمرين

د لاندې يو حده افادو د ضرب حاصل پيدا کړئ:

$a)\ \frac{-a^4b^8}{a^4b^7}$

$b)\ \frac{a^4b^2}{a^6b^2}$

$c)\ \frac{10m^4}{30m}$

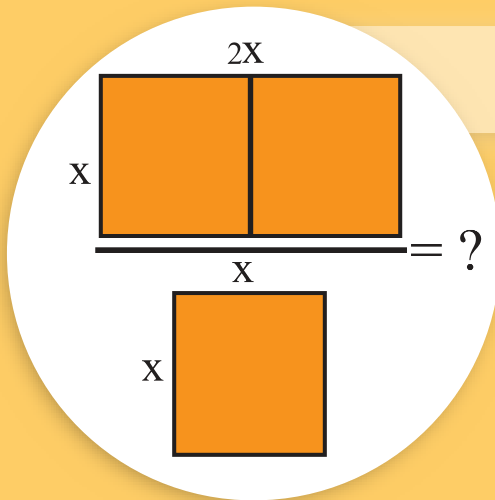
$d)\ \frac{-9c^4d^5}{-45c^3d^3}$

$e)\ \frac{6xy^2 - 3xy + 2x^2y}{xy}$

$f)\ \frac{4y^2+6}{2}$

د یو حده افادو ویش

د یوه مستطیل مساحت چې اوږدوالی 2x او سور یې x دی، د هغې مربع د مساحت څو برابره کیږي چې اوږدوالی یې x دی؟



فعالیت

تش ځایونه ډک کړئ.

$$\frac{3y^5}{y^2} = \frac{3y^{\square}\,y^{\square}}{y^2}$$

$$\frac{3y^5}{y^2} = 3y^{\square-\square} = 3y^{\square}$$

$$\frac{6x^5y^5}{7x^2y^3} = \frac{6x^{\square}\,x^{\square}\,y^{\square}\,y^{\square}}{7x^2y^3} = \frac{6}{7}x^{\square}\,y^{\square}$$

$$\frac{6x^5y^5}{7x^2y^3} = \frac{6}{7}x^{\square-\square}\,y^{\square-\square} = \frac{6}{7}x^{\square}\,y^{\square}$$

- د یو حده افادو د ویش دواړه طریقې یو له بل سره پرتله او وواياست چې په هره طریقه کې له کوم خاصیت څخه کار اخیستل شوی دی؟
- د متحولینو ضریب او توانونه چې په مقسوم او مقسوم علیه کې دي یو له بل سره څه ډول اړیکې لري؟

د پورته فعالیت څخه ویلای شو:

د یو حده افادو په ویش کې د کسرونو د ساده کولو له طریقې څخه کار اخیستل کیږي. لومړی د یو حده افادې عددي ضریبونه یو پر بل وېشو او پاتې حدونه د توانونو د قوانینو له مخې سره ساده کوو.

لومړی مثال: د $-20x^4y^3z$ یو حده افاده پر $5x^3y^2z$ باندې وېشو:

حل:

$$\frac{-20x^4y^3z}{5x^3y^2z} = \frac{-20}{5}\times\frac{x^4}{x^3}\times\frac{y^3}{y^2}\times\frac{z}{z}$$
$$= -4xy$$

دویم مثال: د $\frac{12x^3+8x^2}{2x}$ الجبري افاده ساده کړئ.

حل:

$$\frac{12x^3+8x^2}{2x} = \frac{12x^3}{2x}+\frac{8x^2}{2x}$$
$$= 6x^2+4x$$

تمرین

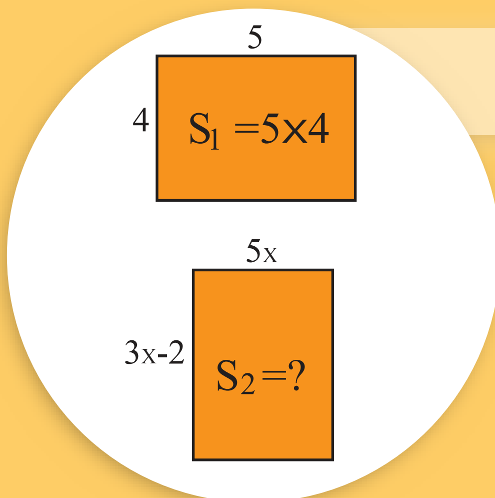
ساده یې کړئ:

$a)\ \frac{-a^4b^8}{a^4b^7}$ $\quad b)\ \frac{a^4b^2}{a^6b^2}$

$c)\ \frac{10m^4}{30m}$ $\quad d)\ \frac{-9c^4d^5}{-45c^3d^3}$

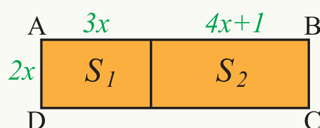
$e)\ \frac{6xy^2-3xy+2x^2y}{xy}$ $\quad f)\ \frac{4y^2+6}{2}$

د الجبري افادو ضرب



پوهېږئ، که د يو مستطيل اوږدوالى 5 او سور يې 4 سانتي متره وي، مساحت يې څنګه پيدا کولاى شو؟آيا د يو داسې مستطيل مساحت چې اوږدوالي يې 3x-2 او سور يې 5x وي هم پيدا کولاى شو؟

فعاليت



مخامخ شکل په پام کې ونيسئ:

- د S_1 مستطيل مساحت د يوې الجبري افادې په ډول وليکئ.
- د S_2 مستطيل مساحت د يوې الجبري افادې په ډول وليکئ.
- د $ABCD$ مستطيل مساحت د يوه الجبري افادې کې وليکئ او هغه په S سره وښياست.
- د S , S_1 او S_2 ترمنځ څه ډول اړيکې شتون لري؟

د پورته فعاليت څخه ليکلاى شو:

که چېرې يو الجبري حد په يوې الجبري افادې کې ضرب کړو ددې لپاره په جمع کې د توزيعي له خاصيت څخه کار اخيستلى شو.

لومړى مثال: د $-5ax^2$ يو حده د $x^2 - a^2$ په الجبري افادې کې ضرب او دضرب حاصل يې پيدا کړئ.

حل:

$$-5ax^2(x^2 - a^2) = (-5ax^2) \times x^2 + (-5ax^2) \times (-a^2)$$
$$= -5ax^4 + 5a^3x^2$$

دويم مثال: $3a^2(a^3 - 2a^2 + 6a) = ?$

حل:

$$3a^2(a^3 - 2a^2 + 6a) = 3a^2(a^3) + 3a^2(-2a^2) + 3a^2(6a)$$
$$= 3a^5 - 6a^4 + 18a^3$$

فعالیت

	$3x$	$2b$
$2x$	S_1	S_3
b	S_2	S_4

- مخامخ شکل په پام کې ونیسئ.
- د S_1 مستطیل مساحت پیدا کړئ.
- د S_2 مستطیل مساحت پیدا کړئ.
- د S_3 مستطیل مساحت پیدا کړئ.
- د S_4 مستطیل مساحت پیدا کړئ.
- که چېرې د مستطیل اوږدوالی $3x+2b$ او سور یې $2x+b$ وي.د لوی مستطیل مساحت پیدا کړئ او هغه په S سره وښیاست.
- د S ، S_1 ، S_2 ، S_3 او S_4 تر منځ اړیکې ولیکئ.

له پورته فعالیت څخه لیکلی شو:

که چېرې دوه الجبري افادې یو له بل سره ضرب کړو ددې له پاره په جمع کې د توزیعي خاصیت څخه په کار اخیستنې سره د لومړی افادې ټول حدونه په ترتیب سره د دویمې افادې په ټولو حدونو کې ضربوو.

لومړی مثال: د $x+2$ دوه حده د $x-1$ په دوه حده کې ضرب او د ضرب حاصل یې په لاس راوړئ.

حل:

$$(x+2)(x-1)=x(x-1)+2(x-1)$$
$$=x^2-x+2x-2$$
$$=x^2+x-2$$

دویم مثال: د $(x+2)(x-2)$ افاده ساده کړئ.

حل:

$$(x+2)(x-2)=x(x-2)+2(x-2)$$
$$=x^2-2x+2x-4$$
$$=x^2-4$$

دریم مثال:د $(x-2)$ دوه حده د (x^3+5x-7) په درې حده کې ضرب او د ضرب حاصل یې پیدا کړئ.

حل:

$$(x-2)(x^3+5x-7)=x\cdot x^3+x\cdot 5x+x(-7)-2x^3-2(5x)-2(-7)$$
$$=x^4+5x^2-7x-2x^3-10x+14$$
$$=x^4+5x^2-2x^3-17x+14$$

تمرین

د لاندې افادو د ضرب حاصل لاس ته راوړئ:

1) $-3n(2n^4-6n^2)$
2) $5ab(a^2-ab+b^2)$
3) $-9k^3(2k^2-4k-7)$
4) $(a+b)(x+y)$
5) $(x+1)(x^2-x+1)$
6) $(2a+3b)(2a-\frac{3c}{2})$

مطابقتونه
Identities

$$(10002)(9998)=$$
$$(10000+2)(10000-2)$$
$$=(10000)^2-2^2$$

آیا کولای شئ د، 10002×9998 د ضرب لپاره یوه ساده او لنډه لار پیدا کړئ؟

فعالیت

په لاندې جدول کې د A او B دوو الجبري افادو قیمت د x د مختلفو قیمتونو لپاره پیدا کړئ:

x	$A = 3x(2x-4)$	$B = 6x^2 - 12x$
3		
2		
-4		
0		
$\frac{1}{2}$		

- د A او B ترمنځ څه ډول اړیکې شته دي؟
- لاس ته راغلې رابطه په دوو نورو مثالونو کې وازمویئ.

له پورته فعالیت څخه کولای شو د A او B ترمنځ اړیکې په لاندې توګه په لنډ ډول بیان کړو:
دوه الجبري افادې چې د متحول د ټولو قیمتونو لپاره، تل سره مساوي وي یو مطابقت بلل کیږي.

فعالیت

- د ضرب لاندې عملیې د مطابقت په پام کې نیولو سره سرته ورسوئ.

a) $202\cdot198=?$
b) $104\cdot96=?$
c) $32\cdot28=?$

• تش ځایونه ډک کړئ.

$a: \quad (a+b)(a-b) = \cdots - \cdots + \cdots - \cdots$

$b: \quad (a-b)(a+b) = \cdots + \cdots - \cdots - \cdots$

• په پورته افادو کې $a = 200$ او $b = 2$ د مساوات په ښي او کیڼي خواو کې کېږدي د a او b اجزاو د ضرب حاصل یو له بل سره پرتله کړئ. کومه طریقه ساده ده؟

• بیا $a = 100$ او $b = 4$ د مساوات په ښي او کیڼي خواوو کې کېږدي د a او b د ضرب حاصل یو له بله سره پرتله کړئ.

له پورته فعالیت څخه داسې پایله لاس ته راځي:

د دوو عددونو د مجموع او هم د همدغو دوو عددونو د تفاضل د ضرب حاصل مساوي دی د همغه دوو عددونو د مربعاتو له تفاضل سره، لکه: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ چې د مربعاتو د تفاضل په نامه یادېږي.

مثال: دلاندې هرې افادې د ضرب حاصل پیدا کړئ:

a) $(x-5)(x+5)$ b) $(5x^2y^5+7)(5x^2y^5-7)$

c) $(2a^2+5a)(2a^2-5a)$ d) $(\frac{x}{4}-1)(\frac{x}{4}+1)$

حل a):

$$(x-5)(x+5) = x \times x + 5x - 5x - 5 \times 5$$
$$= x^2 - 25$$

b):

$$(5x^2y^5+7)(5x^2y^5-7) = (5x^2y^5)^2 - 7(5x^2y^5) + 7(5x^2y^5) - (7)^2$$
$$= 25x^4y^{10} - 49$$

c):

$$(2a^2+5a)(2a^2-5a) = (2a^2)^2 - (5a)^2$$
$$= 4a^4 - 25a^2$$

d):

$$(\frac{x}{4}+1)(\frac{x}{4}-1) = (\frac{x}{4})^2 - (1)^2$$
$$= \frac{x^2}{16} - 1$$

تمرین

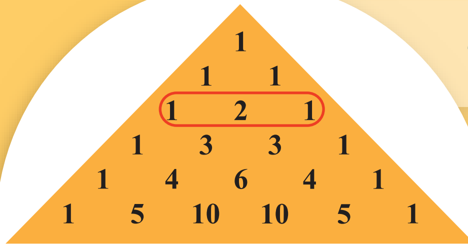
لاندې افادې ضرب او د دوه حده د مربعاتو د تفاضل په شکل یې ولیکئ.

a) $(P-7)(P+7)$ b) $(\frac{1}{x}+1)(\frac{1}{x}-1)$ c) $(x+2)(x-2)$

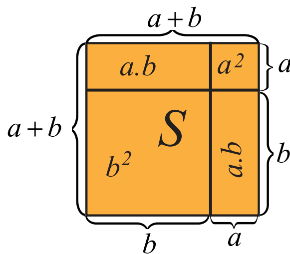
d) $(2x+5)(2x-5)$ e) $(49+1)(49-1)$ f) $(6x-y)(6x+y)$

د دوه حده افادو د جمعې او تفاضل مربع

مخامخ عددي مثلث د پاسکال مثلث په نامه یادېږي ددې مثلث دریمه لیکه څه را ښیي؟

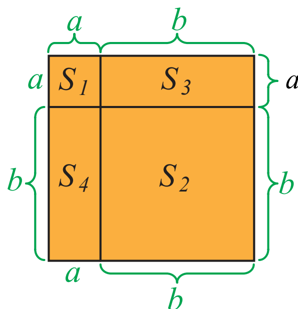


فعالیت



- یوه مربع په پام کې ونیسئ چې د ضلعې اوږدوالی یې $a+b$ وي.
- د مربع مساحت په S سره وښیاست او قیمت یې ولیکئ.
- نومورې مربع په داسې دوو مربع ګانو چې مساحتونه یې a^2, b^2 او دوو مستطیلونو چې مساحتونه یې $a.b$ وي د لاندې شکل په ډول وویشئ او هغه په S_1 ، S_2 ، S_3 او S_4 سره وښیاست.
- د مربع ګانو او مستطیلونو د مساحتونو مجموعه ولیکئ.
- د اصلي یعنې لومړنۍ مربع مساحت د مربع ګانو او مستطیلونو د مساحتونو له مجموعې سره څه ډول اړیکه لري؟
- لاسته راغلې رابطه په جمع کې د ضرب توزیعي خاصیت په کارولو سره وښیاست.

له پورته فعالیت څخه لیکلای شو:



د دوو حدونو د مجموع مربع مساوي دی د لومړي حد مربع جمع د لومړي او دويم حدونو د ضرب حاصل دوه برابره جمع د دويم حد مربع سره یعنې:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

لومړی مثال: د $(x+3)^2$ افادې ته پراختيا ورکړئ.

حل:

$$(x+3)^2 = x^2 + 2\times 3\times x + (3)^2$$
$$= x^2 + 6x + 9$$

دويم مثال: د $(3x+5y)^2$ افادې ته پراختيا ورکړئ.

حل: د $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ مطابقت په کارولو سره ليکلی شو:

$$(3x+5y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5y) + (5y)^2$$
$$= 9x^2 + 30xy + 25y^2$$

دريم مثال: $(x+\frac{1}{2})^2 = x^2 + 2\frac{1}{2}x + (\frac{1}{2})^2$

حل: که چېرې د $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ په مطابقت کې د b په ځای (-b) کېږدو، نو يو نوی مطابقت ليکو.

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$

د دوو حدونو د تفاضل مربع مساوي دی د لومړي حد مربع منفي د لومړي او دويم حدونو د ضرب حاصل دوه برابره جمع د دويم حد مربع لکه: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

څلورم مثال: د $(x-1)^2$ افادې ته پراختيا ورکړئ.

حل: د $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ مطابقت په کارولو سره ليکلی شو:

$$(x-1)^2 = x^2 - 2(x)(1) + (1)^2$$
$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

پنځم مثال: د $(8x-\frac{1}{3})^2$ افادې ته پراختيا ورکړئ.

حل:

$$(8x-\frac{1}{3})^2 = (8x)^2 - 2(8x)(\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3})^2$$
$$= 64x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{1}{9}$$

تمرين

1- لاندې افادو ته د مطابقت په ډول پراختيا ورکړئ.

a) $(m+1)^2 = ?$ b) $(x+7)^2 = ?$ c) $(x+12)^2 = ?$ d) $(x+4)^2 = ?$

2- لاندې افادو ته پراختيا ورکړئ.

a) $(\frac{1}{x}-3)^2 = ?$ b) $(12x-5y)^2 = ?$ c) $(6x-\frac{1}{2})^2 = ?$

د الجبري افادو تجزیه

2x + 3

3x – 1

$S_1 =$

$6x^2 + 7x - 3$

?

?

$S_2 =$

$3x^2 - 4x + 1$

تاسو تر اوسه وکړای شول د یوه مستطیل مساحت چې اوږدوالی یې $2x+3$ او سور یې $3x-1$ دی پیدا کړئ.
آیا فکر مو کړی دی څرنګه کولای شو د مستطیل اوږدوالی او سور پیدا کړو په داسې حال کې چې مساحت یې $3x^2-4x+1$ وي؟

فعالیت

تش ځایونه ډک کړئ.

$(2x-3)(2x+3) = \ldots - \ldots$

$(3y+\ldots)(3y-\ldots) = 9y^2 - a^2$

$(\ldots+\ldots)(\ldots-\ldots) = 4x^2 - 9$

$(4y-2x)^2 = \ldots - \ldots + 4x^2$

$(\ldots+2y)^2 = a^2 - 4ay + \ldots$

$(\ldots+\ldots)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

په پورته فعالیت کې مو ولیدل چې ځینې وخت یوه الجبري افاده د ضرب په شکل په دوو الجبري افادو سره لیکلی شو:

د یوې الجبري افادې لیکل د دوو او یا څو افادو د ضرب په ډول سره تجزیه بلل کیږي.

لومړی مثال: د $4-16x^2$ الجبري افاده تجزیه کړئ.

حل: د مطابقت په کارولو سره لرو:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(2)^2 - (4x)^2 = (2-4x)(2+4x)$$

دویم مثال: د $25a^2-4b^2$ الجبري افاده تجزیه کړئ:

حل:

$$25a^2 - 4b^2 = (5a)^2 - (2b)^2$$
$$= (5a-2b)(5a+2b)$$

دریم مثال: د $x^2+12x+36$ الجبري افاده تجزیه کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

$$x^2+2\times x\times 6+(6)^2$$

لیدل کیږي چې د لومړي او دریمو حدونو د دویم جذر د ضرب حاصل دوه برابره منځنی (دویم حد) حد راکوي، نو پورتنی افاده د $(a+b)^2$ مطابقت شکل لري.

$$x^2+12x+36=(x+6)^2=(x+6)(x+6)$$

څلورم مثال: د $4a^2+28a+49$ افاده د دوو قوسونو د ضرب په شکل ولیکئ.

حل:

$$(2a)^2+2\times 2a\times 7+(7)^2$$

لیدل کېږي چې د لومړي او دریمو حدونو جذرالمربع د ضرب حاصل دوه برابره منځنی (دویم حد) حد راکوي، نو پورتنی افاده د $(a+b)^2$ مطابقت شکل لري.

په پایله کې:

$$4a^2+28a+49=(2a+7)^2=(2a+7)(2a+7)$$

پنځم مثال: د x^2-4x+4 الجبري افاده د دوو قوسونو د ضرب په شکل ولیکئ.

حل:

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

$$x^2-2\times x\times 2+(2)^2$$

لیدل کېږي چې د لومړي او دریمو حدونو جذرالمربع د ضرب حاصل دوه برابره منځنی (دویم حد) حد راکوي، نو پورتنی افاده د $(a+b)^2$ مطابقت شکل لري.

په پایله کې:

$$x^2-2\times x\times 2+(2)^2=(x-2)^2=(x-2)(x-2)$$

تمرین

1- لاندې الجبري افادې تجزیه کړئ:

$a)\ 49x-16$ $b)\ m^2-36$ $c)\ 49-y^2$

$d)\ 25-x^2$ $e)\ x^2y^2-64$ $f)\ \frac{1}{64x^2}-y^2$

2- لاندې افادې د $(a+b)^2$ او $(a-b)^2$ مطابقتونو په ډول په دوو قوسونو سره تجزیه کړئ.

$a)\ x^2+2xy+y^2$ $b)\ x^2+6x+9$ $c)\ 2a^2+4ab+b^2$

$d)\ 4x^2y^2+4xy+1$ $e)\ b^2-12b+36$ $f)\ 4a^2-12ab+9$

د اووم فصل مهم ټکي

• د متحول مفهوم

کولای شو د عمومي قاعدې او قانون د بیانولو لپاره له تورو څخه کار واخلو او د تورو په مختلفو قیمتونو سره افاده مختلف قیمتونه غوره کوي چې په دې صورت کې تورو ته متحول ویل کېږي.

• مشابه یا ورته حدونه

هغه حدونه چې د هغو توپیر یوازې په ضریبونو کې وي او ضریبونه یې توپیر ولري، توري او توانونه یې یو ډول وي مشابه حدونه بلل کیږي.

• الجبري افادې

د $2a+b$, $\sqrt{4a+b}$, ab, $3x-4$, a^2 افادې چې د جمعې، تفریق، ضرب، وېش توان او جذر د عملیو له ترکیب څخه چې په کې عددونه، یو یا څو متحولین دي جوړې شوی وي، الجبري افادې بلل کېږي.کولای شو د یوې الجبري افادې قیمت د متحول دمختلفو قیمتونو لپاره پیدا کړو.

• د یوه حده افادې تعریف

هغه عددونه یا الجبري توري، چې د ضرب، وېش، طاقت او جذر عملیو لاندې راغلی وي، یو حده الجبري افاده بلل کېږي.

• د یو ه حده افادې ضریب

هغه عدد چې په متحولینو کې ضربېږي د یوه حده افادې ضریب بلل کېږي.

• د دوو یو حده الجبري افادو ضرب کول

څرنګه چې په پورتني فعالیت کې لکه $4a^2b$, $2x^2y$, $\frac{2y}{x}$, $3x^3y^2$ افادې د عدد او توان لرونکو متحولینو د ضرب څخه جوړ شوي دي، د یو حده او هغه عددونه چې په متحولینو کې ضرب شوي دي، د یوه حده ضریب بلل کېږي.

د یو حده په ضربولو کې لومړی باید د هغو ضریبونه یو بل سره ضرب کړو او د مشابه متحولینو توانونه هم یو له بل سره جمع کوو.

یوحده: یوه الجبري افاده چې یوازې د ضرب او یا وېش په حالت کې وي یو حده افاده جوړوي.

لکه: $4a^2b$, $6ab^2$, $\frac{3y^2}{3x^2}$, $2x^2y, \frac{3abc}{c^2}$ او $\frac{3x^2y^2}{5ab}$

● **د يوې الجبري افادې وېش پر بلې باندې**:

د يو حده افادو په وېش کې د کسرونو د ساده کولو له طريقې څخه کار اخيستل کېږي لومړی د يو حده افادې عددي ضريبونه يو پر بل باندې وېشو او پاتې حدونه د توانونو د قوانينو څخه په کار اخيستنې سره ساده کوو.

● **مطابقت**:

● دوه الجبري افادې چې د مساواتو په دواړو خواو کې د متحول د ټولو قيمتونو لپاره تل مساوي وي، يو مطابقت بلل کېږي.

● د دوو عددونو مجموعه او د همغه دوو عددونود تفاضل د ضرب حاصل مساوي دی د هم هغو دوو عددونو د مربعاتو له تفاضل سره چې د مربعاتو د تفاضل په نامه يادېږي.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

● د دوو حدونو د مجموع مربع مساوي دی د لومړي حد مربع جمع د لومړي او دويمو حدونو د ضرب حاصل دوه بر ابره جمع د دويم حد مربع: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

● د دوو حدونو د تفاضل مربع مساوي ده د لومړي حد مربع منفي د لومړي او دويم حدونو د ضرب حاصل دوه برابره جمع د دويم حد مربع:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

عمومي پوښتنې

1- لاندې پوښتنې په غور سره ولولئ د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه درکړ شوي دي سم ځواب يې وټاکئ او کرښه ترې تاو کړئ.

- يو عدد ضرب په خپل عدد کې جمع 6 عبارت دي له:

$a)\ x^2-6$ $b)\ x+6$ $c)\ x^2+6$ $d)$ هيڅ يو يې هم نه دی

- د $-5ab(4ac)$ د ضرب حاصل عبارت دي له:

a) $-2a^2bc$ b) $-20a^2bc$ c) $2ab^2c$ d) $20a^2bc^2$

- د $\frac{4m^2n^2}{-4m^3n^2}$ د وېش حاصل عبارت دي له:

$a)\ m^{-1}$ $b)\ \frac{-1}{m}$ $c)\ -m^{-1}$ $d)$ د b او c ځوابونه صحيح دي

- که چېرې $x=\frac{1}{2}$ وي په دې صورت کې د $6x^3-\frac{1}{2}$ افادې قيمت عبارت دی له:

$a)\ -\frac{1}{4}$ $b)\ 4$ $c)\ 4^{-1}$ $d)\ \frac{1}{4}x$

- m^2-9n^2 مساوي دی له:

$a)\ (m-3n)(m+3n)$ $b)\ (m-3n)(m-3n)$

$c)\ (m+3n)(m+3n)$ $d)$ درې واړه غلط دي

2- لاندې جملې په غور ولولئ تش ځايونه يې په مناسبو کلمو او عددونو سره ډک کړئ:

- د الجبري افادو د ساده کولو لپاره .... يو له بل سره جمع او يا يو له بل څخه تفريقوو.
- $(a+b)^2=\cdots+2ab+b^2$
- هغه عددونه يا الجبري توري چې .... تر عمليو لاندې راغلي وي يو الجبري حد بلل کېږي.
- هغه عدد چې په متحولينو کې .... کېږي. د يوه حده ضريب بلل کېږي.

3- لاندې افادې ساده کړئ:

$a)\ 2b(-3c)^2$ $\quad b)\ (-6xy^2)(-ax^2y^2)$ $\quad c)\ -3b^2(-2ab)(6a^2b)$

$d)\ -2a(-3ab)^2$ $\quad e)\ 4y^2(6xy)$ $\quad f)\ (-2a^3)(-5ab^2)$

4- لاندې کسرونه ساده کړئ:

$a)\ \dfrac{12x^2y^4}{2xy^3}$ $\quad b)\ \dfrac{3ab}{-3a}$ $\quad c)\ \dfrac{16r^3s}{-2rs}$

$d)\ \dfrac{-15xyz}{-3xy}$ $\quad e)\ \dfrac{-5a^2b+10ab^2}{-5ab}$ $\quad f)\ \dfrac{6x^2-4x^2}{-2x^2}$

5- ساده یې کړئ:

$a)\ 7a^3b^4c^2-8a^3b^4c^2$ $\quad b)\ \begin{array}{r} 5x+y \\ +\ 3x-2y \\ \hline \end{array}$ $\quad c)\ \begin{array}{r} 4a+5b-2c \\ +\ 4a-3b-2c \\ \hline \end{array}$

6- لاندې هره دوه حده تجزیه کړئ:

$a)\ x^2-1$ $\quad b)\ x^2y^2-64$ $\quad c)\ \dfrac{4a^2}{b^2}-25$

$d)\ m^2-16a$ $\quad e)\ x^2-\dfrac{1}{4}$ $\quad f)\ \dfrac{1}{4}a^2-\dfrac{1}{9}b^2$

$g)\ 121-y^2$ $\quad h)\ \dfrac{25a^2}{b^2}-\dfrac{36a^2}{d^2}$ $\quad i)\ \dfrac{81}{a^2}-\dfrac{b^2}{49}$

7- د مطابقت په کارولو سره لاندې افادې ساده کړئ:

$a)\ (\frac{1}{2}+z)(\frac{1}{2}-z)$ $\quad b)\ (\frac{a}{5}+\frac{1}{b})(\frac{a}{5}-\frac{1}{b})$ $\quad c)\ (5a+2b)(5a-2b)$

8- لاندې الجبري افادو ته پراختیا ورکړئ:

$a)\ (m+1)^2$ $\quad b)\ (y-2)^2$ $\quad c)\ (x+\frac{3}{2})^2$

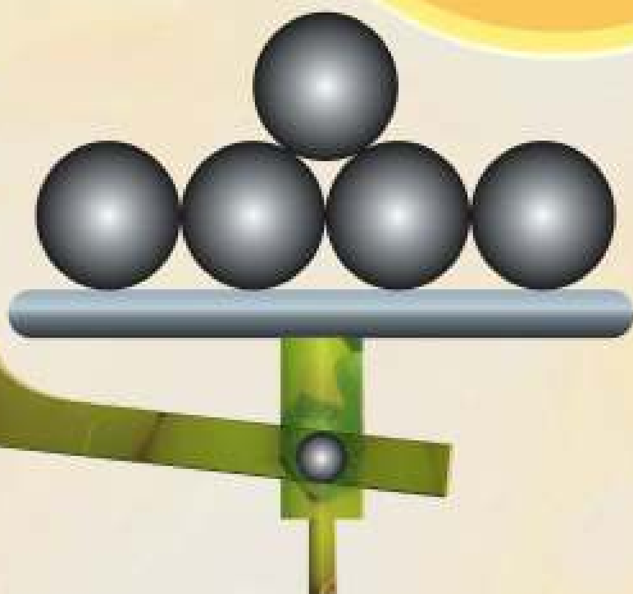
$d)\ (b-\frac{5}{2})^2$ $\quad e)\ (a+7)^2$ $\quad f)\ (m+\frac{1}{4})^2$

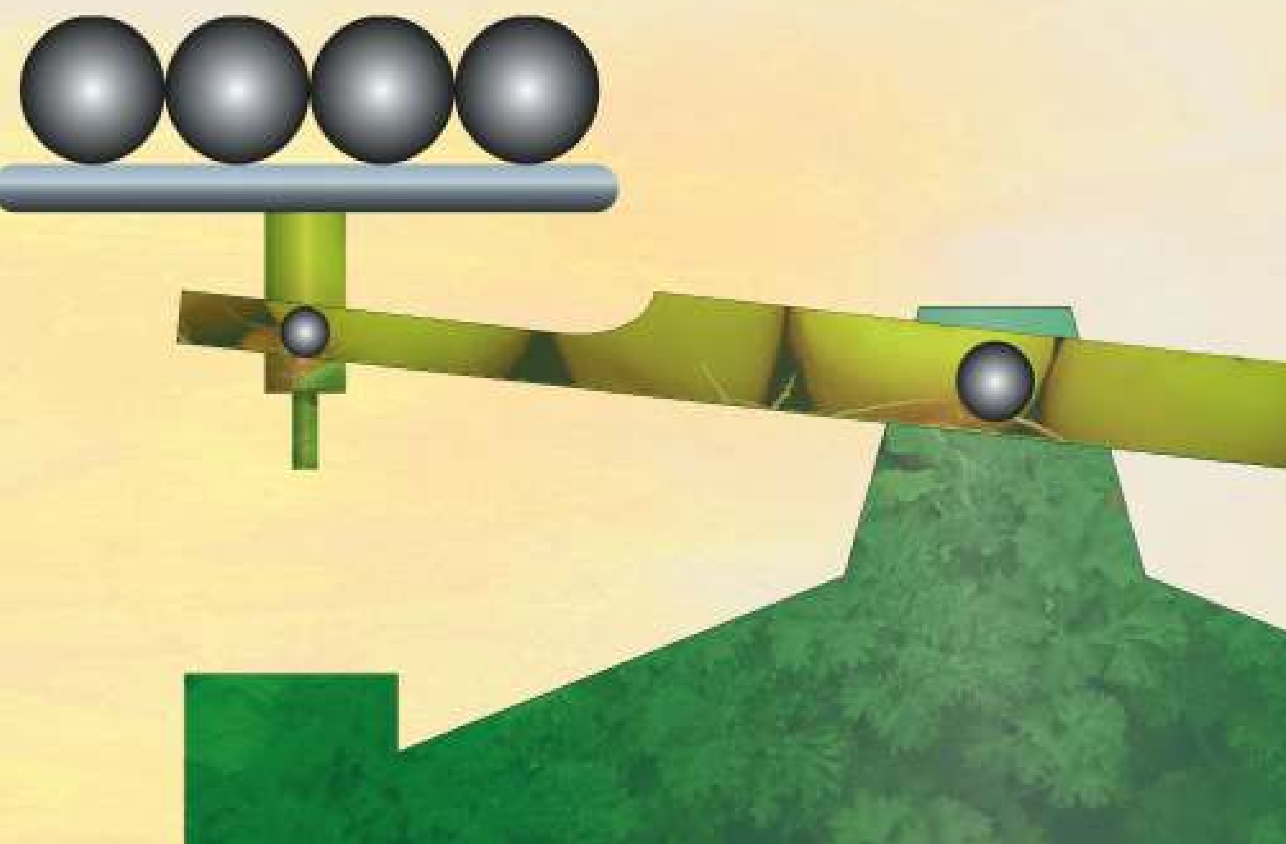
9- لاندې الجبري افادې تجزیه کړئ:

$a)\ 4x^2y^2-9z^4$ $\quad b)\ x^2-8x+16$ $\quad c)\ a^2x^2+4axy+4y^2$

فصل هشتم

معادله





د معادلې مفهوم



زرغونه: په لاس کې دې څو افغانۍ دي؟
فهیمه: که زما د لاس د پیسو له دوه برابره څخه دوه افغانۍ کمې شي، شل افغانۍ کیږي.
زرغونه:پوه شوم چې اوس څو افغانۍ لرې.
فهیمه: څنګه پوه شوې چې زه څو افغانۍ لرم؟

فعالیت

زلمي وغوښتل له یوې هټۍ څخه یو کیلوګرام بوره راونیسي. هټیوال یوازې د 100 ګرامو، 150 ګرامو، 250 ګرامو، نیم کیلویي او د دوه کیلو یې وزنونه درلودل.

- هټیوال زلمي ته په څه ډول بوره وتلي؟ د یو کیلوګرام بورې تللو لپاره کومه یوه لاندې طریقه سمه ده؟
- هټیوال لومړی نیم کیلو بوره تلي، بیا د نیم کیلویي وزن د نیم کیلو تلل شوې بورې سره یو ځای د تلې په یوه پله کې ږدي او د تلې په بله پله کې یو کیلوګرام بوره تلي.
- هټیوال دوه کیلوګرامه بوره تلي او بیا 2 کیلو تلل شوې بوره د تلې په دواړو پلو کې نیمايي کوي.
- د پورته وزنونو په درلودلو تاسو کولای شئ د یو کیلوګرام بورې د اندازه کولو لپاره کومه بله طریقه وړاندې کړئ؟ د هرې طریقې په پای کې د تلې دواړه پلې نسبت یو بل ته څه ډول حالت لري په هره طریقه کې د تلې د دواړو پلو توکې یو له بل سره څه ډول نسبت لري؟
- که چېرې د تلې په یوه پله کې یو نامعلوم تړلی وزن او یو کیلو یي وزن او په بله پله کې یې د نیم کیلویي او دوه کیلویي وزنونه داسې کېښودل شي چې تله د تعادل او برابروالي حالت ولري. د تلې د پلو تعادل او برابروالی د یوې الجبري مساوات په واسطه وښیاست؟

- آیاګومان کولای شی چې تړلې وزن څومره دی؟ په بل عبارت نامعلوم تړلی شی به څومره وزن ولري تر څو تله د تعادل حالت وساتي.

په پورته فعالیت کې د یوه کیلوګرام بورې د تللو او د مختلفو وزنو سره په تعادل کې راوړل، د معادلې د مفهوم لپاره لاندې نتیجه په لاس راوړو.

تعریف

یو الجبري مساوات چې یو نامعلوم (مجهول) متحول ولري او د مجهول د ځینو قیمتونو لپاره صدق کوي معادله بلل کېږي، هغه عدد چې الجبري مساوات په یوه عددي مساوات بدلوي د معادلې حل یا ځواب بلل کېږي.

- هر هغه شی چې د معادلې په حل کې هغه ته قیمت پیدا کوو د معادلې مجهول بلل کېږي او هغه په x سره ښيي.

مثال: که چېرې له یوه عدد سره د 5 عدد جمع شي له 15 سره مساوي کېږي، عدد پیدا کړئ؟

حل: هغه عدد چې غواړو پیدا یې کړو، یعني مجهول ته x وایو، نو پوښتنه داسې ده که چېرې له x سره د 5 عدد جمع شي 15 کېږي، یعني: $x+5=15$

هغه کوم عدد دی چې له 5 سره جمع شي او په پایله کې 15 لاس ته راشي؟

له پورته معادلې ځخه کولای شو وو وایو چې د 10 عدد دی یعني:

$$x=10$$

اوس که چېرې د پوښتنې د ازمولو لپاره لاس ته راغلی عدد د $x+5=15$ په معادله کې کېږدو، نو لرو:

$$x+5=15$$
$$10+5=15$$
$$15=15$$

ځرنګه چې عددي مساوات د $15=15$ صحیح دی له دې امله هغه د ګومانې عدد ځواب د معادلې لپاره سم دی.

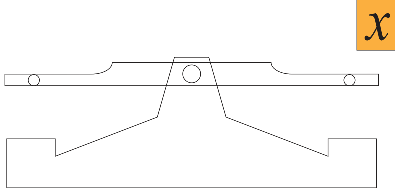
تمرین

1- که چېرې د یوه متساوي الاضلاع مثلث محیط (شاوخوا) مساوي د 9 واحده سره وي د یوه الجبري مساوات په واسطه د مثلث د ضلعو اوږدوالی پیدا کړئ.

2- که چېرې د یوه عدد سره 9 جمع شي 14 په لاس راځي، عدد کوم دی؟

3- د لوست په پیل کې د زرغونې او فهیمې ترمنځ خبرې شوې دي په یوه الجبري مساوات کې ولیکئ.

په معادله کې د جمعې او تفریق عملیې



که چېرې یو نا معلوم وزن او دوه غونډارې د تلې په یوه خوا کې او په بله خوا کې یې 5 غونډارې داسې کېښودل شي چې د تلې خواوې سره برابرې او مساوې وي. نامعلوم وزن د څو غونډارو سره مساوي کېږي؟ څه ویلای شئ؟

فعالیت

په پورتني حالت کې د تلې تعادل په دې معنا دی چې د جسمونو وزن د تلې په دواړه پلو کې یو له بل سره برابر دی، نو که چېرې د کېنې خوا نامعلوم وزن ته x ووایو، لاندې پوښتنو ته ځواب ووایاست:

- هغه عبارت یا ریاضیکي افاده چې د تلې د تعادل لپاره 2 غونډارو او یوه مجهول وزن په یوه خوا کې او په بله خوا کې د 5 غونډارو څخه جوړېږي، ولیکئ؟
- که چېرې د تلې له دواړه پلو څخه 2 غونډارې واخیستل شي آیا د تلې تعادل پاتې کېږي؟
- د تلې له دواړه پلو څخه د غونډارو اخیستل د ریاضي له نظره یا د ریاضي په عملیه کې یو ډول دی؟
- دا چې د غونډارو په کمولو سره تعادل له منځه نه ځي دا عمل د ریاضي له نظره څه معنا لري؟
- که چېرې اوس د تلې په دواړه پلو کې 4 غونډارې چې سره مساوي او هم ډول دي، ورزیات شي څه پېښیږي؟

د پورته فعالیت سرته رسولو او لیدلو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که چېرې یو تله د تعادل په حالت کې وي او له دواړه خواو څخه عیني مقدار یا اندازه کمه شي او یا په دواړه پلو کې مساوي مقدارونه یا اندازې ورزیاتې شي، بیا هم تعادل پاتې کېږي.
د ریاضي په اصطلاح که چېرې د یوه مساوات له دواړو خواو څخه عیني عدد کم او یا له هغه سره هماغه عدد جمع کړو بیا هم د مساوات دواړه خواوې یو له بل سره مساوي پاتې کېږي، یعنې:

که چېرې $a = b$ وي، د c هر حقیقي عدد لپاره:

$a + c = b + c$ او $a - c = b - c$ دي.

له دې خاصیت څخه د معادلو په حل کې کار اخیستل کېږي.

لومړی مثال: د $x+7=9$ معادله حل کړئ؟

پوهېږو که چېرې د معادلې له دواړه خوا څخه 7 تفریق کړو د معادلې په تعادل کې بدلون نه راځي، له دې امله:

$$x+7-7=9-7$$
$$x=2$$

ازمایښت: که چېرې د معادلې حل یعنې 2 په راکړل شوی لومړی معادله کې د x په ځای کېښودل شي، نو لرو:

$$x+7=9$$
$$2+7=9$$
$$9=9$$

څرنګه چې د مساوات دواړه خواوې سره مساوي دي، د معادلې حل یعنې $x=2$ سم دی.

دویم مثال: د $x-5=4$ معادلې حل په لاس راوړئ؟

حل: که چېرې د معادلې په دواړو خواو باندې 5 ورزیات کړو د معادلې په تعادل کې بدلون نه راځي.

$$x-5+5=4+5$$
$$x=9$$

ازمایښت: د معادلې حل یعنې 9 په اصلي معادله کې د x په ځای ږدو:

$$x-5=4$$
$$9-5=4$$
$$4=4$$

څرنګه چې د $4=4$ مساوات شتوالی لري له دې امله؛ $x=9$ د معادلې حل دی.

تمرین

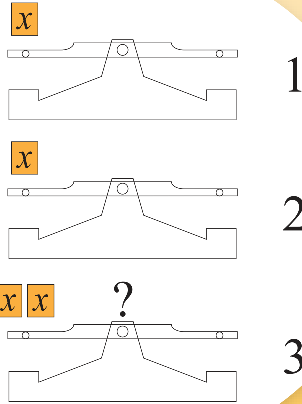
1- که چېرې په یوه عدد باندې 3 ورزیات کړو 15 په لاس راځي؛ عدد کوم دی؟
2- که چېرې له یوه عدد څخه 7 تفریق شي 13 په لاس راځي؛ عدد کوم دی؟
3- لاندې معادلې حل کړئ.

$a)\quad x-6=2$

$b)\quad x+4=1$

$c)\quad 2+x=3$

په معادله کې د ضرب او وېش عملیې



1 او 2 دوه تلې دي د دواړو تلو په یوه، یوه پله کې دوې مساوي غونډارې او په پاتې نورو پلو کې یې یو نامعلوم وزن دی چې تلې د تعادل په حالت کې ساتي. که چېرې د تلو د لومړیو دوو پلو غونډارې په یوه دریمه پله او نامعلوم وزن په بله دریمه پله کې واچوو، د لاندې پوښتنې ځواب پیدا کړئ:

آیا دریمه تله به د تعادل په حالت کې وي او که نه؟

فعالیت

دریمه تله په پام کې نیسو لیدل کېږي چې د تلې په یوې خوا کې دوه مجهول وزنونه او په بله خوا کې یې 4 دانې مساوي غونډارې دي، خو بیا هم تله د تعادل په حالت کې ده. که چېرې مجهول وزنونو ته x ووایو. د لاندې پوښتنو د حل لپاره فکر وکړئ:

- د دریمې ګڼې تلې د تعادل لپاره د ریاضي افاده یا په بل عبارت الجبري بیان کوم دی؟
- که چېرې اوس غونډارې او وزنونه نیمایي کړو یوه برخه یې بیا د لومړۍ تلې په پلوکې او بله برخه یې د همدې دریمې تلې په پلوکې پاتې او کېږدو. آیا بیا به هم په دې حالت کې لومړۍ او دریمه تله تعادل ولري؟
- د غونډارو او وزنونو نیمایي کول د ریاضي له نظره څه معنا لري؟
- آیا دا فعالیت له دوو څخه د زیاتو تلو لپاره هم سرته رسولای شو؟

کولی شو د پورته فعالیت څخه لاندې پایله بیان کړو:

که چېرې د تلې د دواړو خواو وزنونه په دوو یا زیاتو مساوي برخو ووېشو او یا د تلې له دواړه خواو څخه نیمایي وزنونه واخلو بیا هم تعادل پاتې کېږي، ځکه د تلې د دواړو خواو وزنونه یو له بل سره مساوي دي. د ریاضي له نظره که چېرې د یوه مساوات دواړه خواوې په یوه عدد کې ضرب او یا دواړه خواوې پرته له صفر څخه په یوه عدد ووېشو بیا هم دمساوات دواړه خواوې یو له بل سره مساوي پاتې کېږي.

په بل عبارت که چېرې $a = b$ وي نو د c هر حقیقي عدد لپاره لیکلی شو، $ac = bc$ دی.

او د هر حقیقي عدد لپاره چې c د صفر خلاف وي، $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ دی.

مثال: د $3x = 6$ مساوات په پام کې ونیسئ او حل یې پیدا کړئ:

د پورته مساوات دواړه خواوې په 3 وېشو:

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \Rightarrow x = 2$$

ازموینه: که چېرې $x = 2$ سره په راکړل شوې معادله کې کېږدو، نو لرو:

$$3 \times x = 6$$
$$3 \times 2 = 6$$
$$6 = 6$$

لیدل کېږي چې $x = 2$ د معادلې حل دی.

تمرین

لاندې معادلې حل کړئ؟

1) $4x = 2$

2) $\frac{x}{5} = 12$

3) $3x = -6$

4) $\frac{-2}{x} = -4$

5) $\frac{x}{2} = 4$

6) $\frac{4}{x} = -2$

7) $\frac{3x}{4} = \frac{2}{3}$

لومړۍ درجه یو مجهوله عمومي معادله

$$4x + 8 = 0$$

$$4x = -8$$

$$x = ?$$

ښوونکي له زده کوونکو څخه وپوښتل:
که چېرې د یوه عدد له څلور برابر(څلور چنده) سره 8 جمع شي له صفر سره مساوي کېږي، عدد کوم دی؟

فعالیت

آیا د ښوونکي د پورته پوښتنې دحل لپاره د سم ځواب ګومان کولای شي یا ځواب لرئ؟

- که چېرې غوښتل شوي عدد ته x ووایو، آیا کولای شی پورتنی پوښتنه د ریاضي په یوې افادې کې ولیکئ؟
- د هغه د حل د پیدا کولو یا د حل د طریقې لپاره څه ډول سوچ کوی؟
- که چېرې د یوه عدد له 3 چنده څخه 9 تفریق شي نتیجه یې له صفر سره مساوي ده، ددې پوښتنې ریاضیکي افاده ولیکئ؟
- د دې معادلې د حل لپاره د څه ډول طریقې څخه کار اخلئ؟
- که چېرې د یوه عدد په a چند باندې د b عدد ورزیات شي، نتیجه یې له صفر سره مساوي کېږي عدد څو دی؟ (a او b حقیقي عددونه او a خلاف د صفر دی.)

د پورته فعالیت د سرته رسولو سره لاندې پایله په لاس راځي:

پورته عملیو کې نامعلوم مقدار په x سره ښودل کېږي، کولای شو د هغه لپاره یو تساوي د x له مخې په لاس راوړو.

تساوي ته معادله او نا معلوم مقدار ته د معادلې مجهول ویل کېږي او هغې طریقې ته چې د مجهول د پیدا کولو لپاره په کاروړل کېږي د معادلې حل بلل کېږي.

د معادلې عمومي شکل له $ax + b = 0$ څخه عبارت دی چې په دې معادله کې، a او b حقیقي عددونه ا و a خلاف د صفر دی پورتنی شکل د معادلې معیاري یا ستندرد حالت بلل کېږي.

د معادلې حل د ساده الجبري عملیو د سرته رسولو په واسطه ګام په ګام په لاندې توګه په لاس راوړو.

- د معادلې له دواړو خواو سره د مساوي مقدار جمع یا تفریق.

- د معادلې دواړه خوا وې په مساوي مقدار کې ضرب یا وېشل (پرته له صفره).

د پورته عملیو او محاسبې په سرته رسولو سره داسې ځای ته رسېږو چې د معادلې مجهول د مساوات یوې خوا ته او معلوم مقدار یې بلې خوا ته پاتې کېږي په دې ډول د معادلې حل په لاس راځي.

لومړی مثال: د $3x-4=5$ معادله حل کړئ.

حل: لومړی 4 د معادلې له دواړه خواو سره جمع کوو:

$$3x-4+4=5+4 \Rightarrow 3x=9$$

اوس د معادلې دواړه خواوې په 3 ویشو:

$$\frac{3x}{3}=\frac{9}{3} \Rightarrow x=3$$

دویم مثال: د $2(3x+4)=-1-3x$ معادله حل کړئ.

$$2(3x+4)=-1-3x$$

$$6x+8=-1-3x$$

له دواړو خواو سره 3x جمع کوو

$$6x+3x+8=-1-3x+3x$$

$$9x+8=-1$$

له دواړو خواو څخه 8 تفریقوو

$$9x+8-8=-1-8$$

$$9x=-9$$

دواړه خواوې په 9 ویشو

$$\frac{9x}{9}=-\frac{9}{9}=-1$$

$$x=-1$$

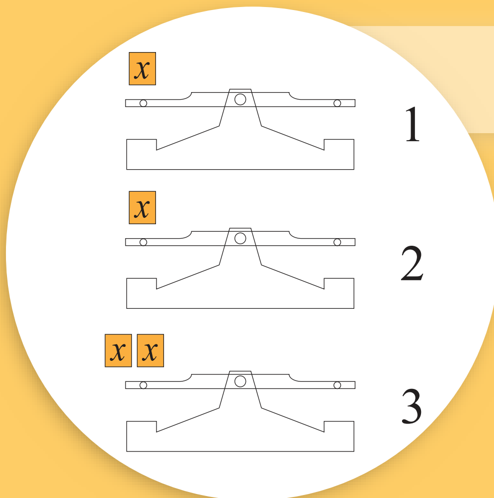
تمرین

1- د $x=-1$ معادلې حل چې له پورته دویم مثال څخه په لاس راغلی دی په اصلي معادله کې وازمویئ.

2- د $2(2x+3)=2x-2$ معادلې حل په لاس راوړئ؟

3- د $\frac{3}{2}(4x-2)=5x+2$ معادله حل کړئ.

معادلي معادلې



په 1، 2، او 3 ګڼو تلو کې څه شی وینئ؟
درې واړه تلې د تعادل په حالت کې دي؟
د تعادل څه ډول نور حالتونه د مساوي او برابرو وزنونو د یو ځای کولو په واسطه، چې د دواړو خواوو پلې د تعادل په حالت کې وساتل شي کار اخیستلای شی، سوچ وکړئ.

فعالیت

لاندې جمله په پام کې ونیسئ.
که چېرې د یوه عدد له دوه برابره (دو چنده) څخه 4 تفریق شي 8 په لاس راځي، عدد کوم دی؟
که چېرې مجهول ته x ووایو په دې صورت کې کولای شو پورتنی بیان د معادلې په شکل په لاندې ډول ولیکو:

$$2x-4=8$$

- د پورته معادلې په پام کې نیولو سره لاندې فعالیت د جدول د تش ځایونو په ډکولو سره، سرته ورسوئ:

حل	لاس ته راغلې معادله	د معادلې په دواړه خواو باندې عملیې	ګڼه
	$2x-4=8$	معادله راکړل شوې ده	1
		د (1) ګڼې معادلې له دواړه خواو سره (8−) جمع کوو	2
		د (1) ګڼې معادلې دواړه خواوې په 2 وېشو	3
	$x-6=0$	1 ګڼه معادله په معیاري ډول لیکو	4

- دا هره یوه معادله د الجبري ساده عملیو په واسطه په لاندې ډول په لاس راوړئ.
- له (1) ګڼې معادلې څخه ← 2 ګڼه معادله ← 3 ګڼه معادله ← 4 ګڼه معادله

له پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

هغه معادلې چې مساوي حل لري معادلې، معادلې بلل کېږي. په یوه معادله باندې د الجبري ساده عملیو په سرته رسولو یو له بل سره معادلې معادلې منځ ته راځي. د معادلې د حل لپاره کوښښ کېږي چې یو له بل سره د معادلو، معادلو طریقې په کارولو معادله په لاس راشي. د معادلې د مجهول د حل پیدا کولو لپاره باید ساده شکل ولري.

مثال: د $2x-4=0$ معادله حل کړئ؟

$$2x-4=0$$

له دواړو خواو سره 4 جمع کوو:

$$2x-4+4=0+4$$
$$2x=4$$

دواړه خواوې په 2 وېشو:

$$\frac{2x}{2}=\frac{4}{2}$$
$$x=2$$

ازموینه: پیدا شوی حل په راکړل شوې معادله کې ږدو لرو چې:

$$2\times 2-4=0$$
$$4-4=0$$
$$0=0$$

څرنګه چې د $0=0$ عددي مساوات شتوالی لري، له دې امله $x=2$ د معادلې حل دی.
د معادلې پیدا شوی قیمت د $2x=4$ په معادله کې ږدو لیدل کېږي $2\times 2=4$ نو د $2x=4$ او $2x-4=0$ معادلې، معادلې (منطبقي) معادلې دي.

تمرین

1- د لاندې معادلو حل پیدا او وازمویې؟

1) $\frac{(a-2)}{3}=3$

2) $2(2x-1)=4$

3) $\frac{2}{5}+x=1$

4) $16-3t=0$

5) $3-4y=2-6y$

2- لاندې کومې معادلې یو د بل معادل دي؟

a) $\begin{cases} x+1=\frac{x}{2}+2 \\ \frac{x}{2}+1=x+2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-4=8 \\ 2x-2=4 \end{cases}$

د معادلو تشکیلول (جوړښت)



$$\frac{1}{2}x - 5 = x - 25$$

عثمان: فرهاده ته څو کلن یې؟
فرهاد: که چېرې زما د پلار له نیمايي عمر څخه 5 کم شي زما له عمر سره مساوي کېږي. هغه وخت چې زه پیدا شوم زما پلار 25 کلن وو.
عثمان: پوه شوم چې ستا پلار 40 کاله او ته 15 کاله عمر لرې.
آیا کولای شی وواياست عثمان څرنګه پوه شو چې فرهاد 15 کلن دی؟

فعالیت

ورځنۍ حسابي پوښتنه په الجبري افادې باندې بدلوو. هخه کوو چې د فعالیت په پای کې د معادلې د جوړښت او حل طریقه پیدا کړو.

- که چېرې د یوه عدد له دوه برابره سره د 4 عدد جمع شي له 16 سره مساوي کېږي، عدد کوم دی؟
- آیا پر پوښتنې باندې پوه شوئ؟ څرنګه کولای شئ هغه په یوه معادله باندې واړوئ.
- په معادلې باندې له بدلولو وروسته د هغه حل په لاس راوړئ؟
- آیا په رښتیا سره ستاسو حل سم دی؟ ویې ازموئ.

له پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

د یوې معادلې د جوړښت او حل د پیداکولو لپاره د پورته فعالیت په پام کې نیولو سره لازمه ده چې لاندې ګامونه په پام کې ونیول شي:
- درک او پوهېدل.
- د مجهول ټاکل او د نوم ایښودل.
- له بیانیې سره سم په ډېر غور د یوې معادلې جوړښت.
- د پوښتنې حل، یا د مجهول د قیمت پیداکول.
- د پوښتنې ازمویل د پیدا شوي حل په واسطه.

مثال: که چېرې د رشاد د پیسو په دوه برابر 20 افغانۍ ورزیاتې شي نو د خوشحال له پېسو سره مساوي کېږي او که چېرې خوشحال 60 افغانۍ ولري د رشاد د پېسو اندازه څو ده؟

$$2x + 20 = 60$$

حل: د معادلې د جوړښت او حل پیدا کولو لپاره په لاندې توګه ګام په ګام پوښتنه حل کوو:

- د پوښتنې پوهيدل او د هغې لوستل په ډېر غور سره.
- د مجهول ټاکل، د رشاد د پېسو اندازه ده چې په x سره يې ښيو.
- د معادلې جوړښت: د رشاد د پېسو په دوه برابر (2x) باندې 20 ورزیاتې شي (2x+20) د خوشحال د پېسو سره مساوي کېږي. 2x+20=60
- د معادلې حل

$$2x + 20 = 60$$

له دواړو خواو 20 تفريق کوو: $2x = 60 - 20 = 40$

دواړه خواوې په 2 وېشو : $2x = 40$

$$\frac{2x}{2} = \frac{40}{2}$$

د رشاد د پېسو اندازه: $x = 20$

ازموینه: که چېرې د رشاد د پېسو په دوه برابر باندې 20 افغانۍ ورزیاتې کړو، نو د خوشحال له پېسو سره مساوي يعنې 60 کېږي. چې دا پوښتنه هم سمه ده:

$$2 \times 20 + 20 = 60$$
$$40 + 20 = 60$$
$$60 = 60$$

څرنګه چې د $60 = 60$ مساوات شته، له دې امله پیدا شوی حل یا قیمت سم دی.

تمرين

1- که چېرې د يوه عدد له درې برابر څخه 5 تفريق شي. د 4 سره مساوي کېږي، عدد کوم دی؟

2- د زرغونې او ملالۍ د عمرونو د جمعې حاصل د 30 سره مساوي کېږي، که چېرې زرغونه د ملالۍ څخه 2 کاله لویه وي، ملالۍ څو کلنه ده؟

د اتم فصل مهم ټکي

• معادله

معادله یو الجبري مساوات دی چې مجهول یکې د جمعې، تفریق، وېش او ضرب عملیو په واسطه یو له بل سره تړل شوي وي، معادله بلل کېږي. د معادلې په دواړو خواو باندې د حسابي عملیو په کارولو سره د معادلې مجهول په لاس راځي.

• الجبري عملیې او معادله

که چېرې د هرې معادلې له دواړو خواو سره یو عدد جمع، تفریق، یا دواړه خواوې (پرته له صفره) په یوه عدد کې ضرب او پرې ووېشل شي په معادله کې کوم بدلون نه راځي.

• لومړۍ درجه یو مجهوله معادله

د $ax+b=0$ ، $a\neq 0$ ، معادله په داسې حال کې چې a خلاف د صفر، x مجهول (a او b حقیقي عددونه دي) لومړۍ درجه یو مجهوله معادله بلل کېږي.

پورتنی معادله د یو مجهوله خطي معادلې په نامه هم یادېږي او هره خطي معادله یوازې د $x=-\frac{b}{a}$ ، $a\neq 0$ حل لري.

• معادلې معادلې

هغه معادلې چې ورته او برابر یعنې مساوي ځواب ولري، معادلې معادلې بلل کېږي. په یوې معادلې باندې د عملیو سرته رسول اود یوې ساده معادلې لاس ته راوړلو په صورت کې معادلې معادلې منځ ته راځي چې دواړه یو ډول یعنې مساوي حل لري.

د یوې معادلې د حل پیداکولو لپاره هڅه کېږي چې د معادلو، معادلو پیداکولو طریقې په کارولو سره چې لومړی د راکړل شوی معادلې ساده شکل چې د معادلې حل آسانوي د الجبري عملیو په واسطه بدلون ورکوي.

• د یو مجهوله خطي معادلې جوړښت

که چېرې وکولای شو ورځنی حسابي پوښتنې د یوې الجبري معادلې په ډول ترتیب کړو، تر څو د هغې له مخې د معادلې حل پیداکړو دا پراوونه د یو مجهوله خطي معادلې جوړښت ده چې د هغې حل موږ ته راکوي. دا مسئله د عبارتي پوښتنو د معادلو د جوړښت په نامه یادېږي.

عمومي پوښتني

د لاندي هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه درکړل شوي دي له هر سم ځواب څخه کرښه تاو کړئ.

1- ددې معادلې $10 + x = 18$ حل عبارت دی له:

a) -8 b) 8

c) 2 (d 4

2- ددې معادلې $12x + 2(5x + 22) = 0$ حل عبارت دی له:

a) 0 b) 1

c) 2 d) -2

3- د یوې معادلې د حل پړاوونه عبارت دي له:

a) درک او پوهېدل

b) د مجهول ټاکل او د نوم اېښودل

c) د پوښتنې حل، یا د مجهول د قیمت پیدا کول

d) ټول صحیح دي

4- د دې معادلې $3x - 6 = 3$ معادل عبارت دی له:

(a $3x - 2 = 1$

(b $x - 2 = 3$

(c $x - 2 = 1$

(d هیڅ یو

لاندي تش ځایونه په مناسب کلمو سره ډک کړئ.

1- یو الجبري مساوات چي د ځینو .... مجهولونو سره چي سمون وکړي.............. یادېږي.

2- هغه معادلې چي .... لرونکي وي د .... په نامه یادېږي.

3- هر هغه شی چي د معادلې په حل کي هغه ته قیمت پیدا کوو د......... بلل کېږي.

له لاندې جملو څخه کومه یوه سمه او کومه یو غلطه ده؟ د سمې مخې ته د (ص) توری او د غلطې مخې ته د (غ) توری ولیکئ.

1 (   ) که چیرې یوه تله د تعادل په حالت کې وي او له دواړو خواوو څخه عینې مقدار یا اندازه کمه شي او یا په دواړه پلو کې مساوي مقدارونه یا اندازې ور زیاتې شي، بیا هم تعادل پاتې کیږي.

2 (   ) هغه معادلې چې د حل لرونکي وي د غیر تساوي معادلاتو په نامه یادیږي.

3(   ) یو الجبري مساوات چې د مجهولونو په ځینو قیمتونو کې صدق وکړي د معادلې په نامه یادیږي.

4(   ) که د معادلې دواړه خواوې په مساوي مقدار کې ضرب یا غیر له صفره وویشو په کې کوم توپیر نه پیدا کیږي.

لاندې سوالونه حل کړئ:

1- لاندې معادلې حل کړئ:

$a)\ t+5=2$ $\quad b)\ x-9=-5$

$c)\ x+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ $\quad d)\ x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

2- د لاندې هرې یوې معادلې حل غوښتل شوی دی:

$a)\ 6y=2$ $\quad b)\ -3x=-4$

$c)\ \frac{x}{2}+1=2$ $\quad d)\ \frac{3}{t}+1=2$

$e)\ 3(2y-1)=x$ $\quad f)\ \frac{1}{2}(4x-1)=\frac{3}{2}$

3- که چیرې د یوه عدد له 5 برابر څخه 2 تفریق شي له 3 سره مساوي کیږي، عدد کوم دی؟

4- که چیرې د یوه عدد په نیمایي باندې 4 ورزیات کړو له 8 سره مساوي کیږي، عدد کوم دی؟

5- د یوه متساوي الساقین مثلث ارتفاع مساوي له 6 واحده سره ده. د مثلث د قاعدې اوږدوالی پیدا کړئ، که چیرې د مثلث مساحت 9 واحد مربع وي؟

6- احمد 100 افغانی درلودې 6 دانې کتابچې یې راونیولې چې بیا هم د هغه سره 25 افغانی پاتې دي معلوم کړئ چې احمد هره کتابچه په څو افغانیو رانیولې ده.

7- د دوو عددونو مجموعه 30 ده که چیرې یو له هغو څخه 20 وي دویم عدد څو دی؟

8- د درې عدد له کوم عدد سره ضرب شي، تر څو د ضرب حاصل مساوي له a سره شي؟
9- که چېرې د دوو عددونو تر منځ توپیر 11 وي او کوچنی عدد x وي، لوی عدد به یې څو وي؟

نهم فصل

رابطه او تابع

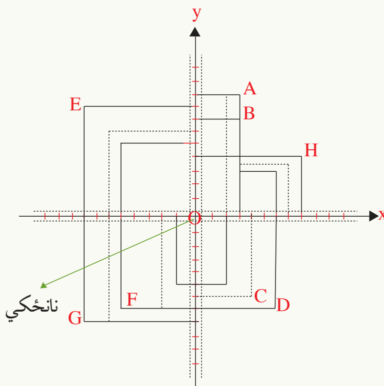




ټکي په مستوي کې

آسمان له ستورو ډک دی.
د سپوږمۍ څلورو خواو ته، یعنې شمال، سویل، ختیځ او لوېدیځ ته د ستورو ځایونه څنګه ټاکلی شئ؟

فعالیت



مخامخ شکل په پام کې ونیسئ، د O له ټکي څخه داسې خطونه رسم شوي دي چې د O په ټکي کې یو پربل عمود دي او هغوی د پورته، ښکته، ښي او کیڼ لورو ته په مساوي واحدونو سره په نښه شوي دي. کوښښ وکړئ هغه ټکي چې په دې مخ کې درکړ شوي د نانځکي لورې د هغو خواته کړئ او لاندې فعالیت سرته ورسوئ:

- نانځکې ته د O له ټکي څخه د B خوا ته لورې ورکړئ.
- آیا کولی شئ له O څخه د B لورې ته بله لنډه فاصله پیدا کړئ؟
- پورتنی فاصلې یو له بله څه توپیر لري؟
- دF ټکي ته د رسیدلو لپاره فاصله داسې وټاکی چې نانځکه یوازې، یو وارې کیڼې خواته د لورې بدلون ولري.
- د F ټکي ته د رسیدلو لپاره فاصله وټاکئ چې نانځکه یوازې یو وارې ښي خواته د لورې بدلون ولري.
- پورتنی فاصلې د کومو عددونو له مخې ټاکلی شو؟
- د ښي او کیڼو فاصلو په ځای له افقي محور څخه چې د O ټکی په صفر باندې منطبق او

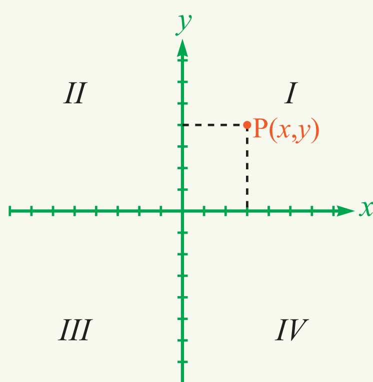
پروت دی. د پورته او ښکته فاصلو لپاره له عمودي محور څخه لکه په شکل کې د O ټکی په صفر باندې منطبق او پروت دی، کار واخلئ او نانځکه د C ، D ، G او H د ټکو خواته د متقاطع محورونو په پام کې نیولو سره لوري ورکړئ او ونښلوئ هغه جوړه عددونه چې د هر ټکي لپاره یې په لاس راوړئ، د هغو په واسطه لاندې جدول بشپړ کړئ.

ټکي	A	B	C	D	E	F	G	H
د افقي محور په مخ	3					–5		
د عمودي محور په مخ				–7				6

له پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

په پورته فعالیت کې مو ولیدل چې موږ نشو کولای د یوه مخ یا مستوي اختیاري ټکی یوازې د هغو عددي محورونو په مخ باندې وټاکو چې موږ یې پېژنو. له دې امله یو بل عمودي محور ته اړتیا ده چې د هغه تعریف د لاندې سیستم په توګه چې دوه قایم محورونه دي وپېژنو.

تعریف



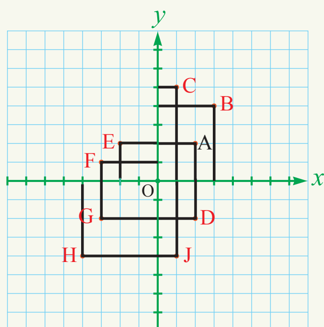
دوه محوره د XX' او YY' چې د O په ټکي کې یو پر بل باندې عمود دي، د قایمو مختصاتو سیستم بلل کېږي.

د XX' فاصلې د محور په نامه او د YY' د ترتیب د محور په نامه یادېږي چې د (x,y) هره ترتیب شوې جوړه د قایمو مختصات په سیستم کې د P یو ټکی ټاکي په داسې حال کې چې د XX' محور پر مخ باندې د ټکي فاصله یعني x او د YY' محور پر مخ باندې د ټکي ترتیب یعني y ټاکي.

د مختصاتو د سیستم محورونه مستوي په څلورو برخو د I، II، III او VI باندې ویشي.

یادونه: غور وکړئ د $P(x,y)$ او $P'(x',y')$ ټکي یو له بله توپیر لري، لکه: د $A(3,1)$ او $A'(1,3)$ ټکي چې په مستوي کې دوه بیل ځایونه دي.

د $A(3,1)$ ټکي یعنې 3 واحده ښي او یو واحد پورته خواته، خو د $A'(1,3)$ ټکي یعنې 1 واحد ښي خواته او 3 واحده پورته خواته ښيي.



مثال: د لاندې ټکو فاصله او ترتیب چې د قایمو مختصاتو په سیستم کې درکړل شوي دي د مرتبو جوړو په توګه په تشریحي ډول په یوه جدول کې ولیکئ:

حل: د قایمو مختصاتو په سیستم کې د مرتبو جوړو په توګه د ټکو مختصات عبارت دي له:

C(1,5)	B(3,4)	A(2,2)
F(–3,1)	E(–2,2)	D(2,–2)
J(1,–4)	B(–4,–4)	G(–3,–2)

په لاندې ډول د جدول په توګه د پورتنیو ټکو په ښودنه په لاس راوړو:

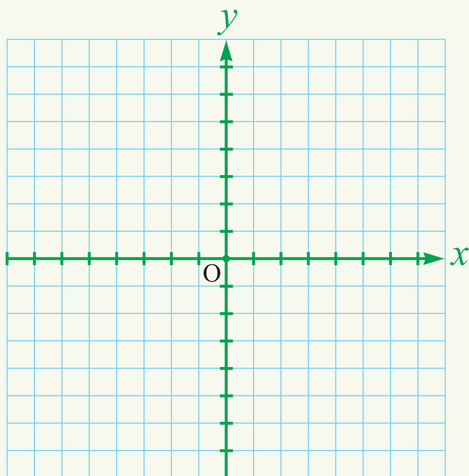
ټکي	A	B	C	D	E	F	G	H	J
x	2	3	1	2	–2	–3	–3	–4	1
y	2	4	5	–2	2	1	–2	–4	–4

تمرین

1- د لاندې مرتبو جوړو جدولي ښوونه ولیکئ:

A(5,5) , B(0,3) , C(–1,1) , D(2,–1)

2- هغه ټکي چې د مرتبو جوړو مختصات يې $A(1,-1)$ ، $B(-3,1)$ ، $C(-1,-2)$ ، $D(-5,-3)$ او $E(1,4)$ دي ځايونه يې د قايمو مختصاتو په سيستم کې وټاکئ.



2- لاندې ټکي د قايمو مختصاتو په سيستم کې وټاکئ:

a) $A(4,5)$

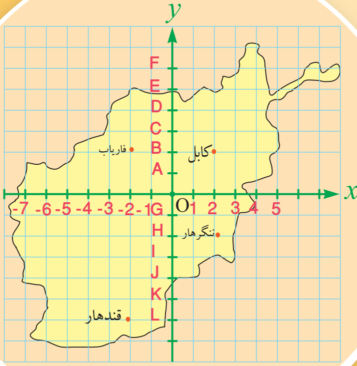
b) $B(-2,-4.5)$

c) $G(0.5,4)$

d) $E(-7,0)$

e) $F(0,4.5)$

f) $K(0,0)$



د يوه ټکي مختصات په مستوي کې

د افغانستان څلور ولايتونه وټاکئ وواياست چې د کوم تورې او کوم عدد په تقاطع کې واقع دي؟
آيا د هر تورې او عدد تقاطع د افغانستان يوه نقطه يا يو ځای ښيي؟

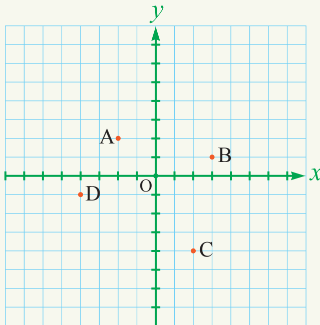
فعاليت

د قايمو مختصاتو سيستم رسم کړئ.

- محورونه د يوه سانتي متر په اندازه سره وويشئ او هر واحد د ملي متر په توګه په نښه کړئ.
- 4 اختياري نقطې د مختصاتو په سيستم کې په خپله خوښه په څلورو ناحيو کې په نښه کړئ. هڅه وکړئ د عمودي او افقي خطونو له مخې د xx´ او yy´ محورونو په مخ باندې د هغو مختصات وټاکئ.
- آيا ګومان کولای شئ چې د مستوي دوه بيل ټکي مساوي مرتبې جوړې لري؟
- آيا دا امکان شته چې دوه بيلې مرتبې جوړې په مستوي کې يو ځای يوه نقطه وښيي؟

د پورته فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې پايله په لاس راځي:

د قايمو مختصاتو په مستوي کې د P د هر ټکي لپاره يوازې د P (x, y) يوه مرتبه جوړه او برعکس د (x, y) هرې مرتبې جوړې لپاره يوازې او يوازې د قايمو مختصاتو په مستوي کې د P يو ټکی وجود لري.



يادونه: د x محور په مخ باندې y=0 دی، لکه (5,0) او همدارنګه د y محور په مخ باندې x=0 دی، لکه (0,2).

مثال: د قايمو مختصاتو يو سيستم په پام کې ونيسئ.

a) د هغو ټکو مختصات چې د مختصاتو په سيستم کې په نښه شوي دي د مرتبو جوړو په ډول يې په جدول کې وليکئ.

b) د $A(1,2)$, $B(-3,4)$, $C(-2,-4)$, $D(2,-2)$ او $E(4,5)$ مرتبې جوړې د قایمو مختصاتو په سیستم کې وټاکئ او یو له بل سره يې ونښلوی.

حل:

a)

$A(-2,2)$

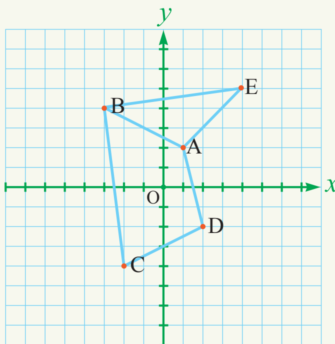
$B(3,1)$

$C(2,-4)$

$D(-4,-1)$

ټکي	A	B	C	D
x	−2	3	2	− 4
y	2	1	−4	−1

b)



تمرین

1- د ټکو مختصات په لاندې ډول د مرتبو جوړو په توګه درکړ شوي دي، د قايمو مختصاتو په سيستم کې يې وټاکې او ټکي په ترتيب يو له بل سره ونښلوئ:

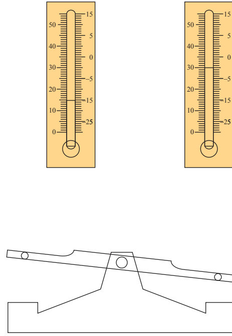
$P_1(1,1)$, $P_2(2,-3)$, $P_3(3,1)$, $P_4(4,-3)$, $P_5(6,-2)$ او $P_6(-4,-5)$

2- د لاندې ټکو مختصات پيدا کړئ:

a) د XX' پر محور باندې يو ټکي چې له مبدا څخه ښي لوري ته د 6 واحدو په اندازه فاصله ولري.

b) د YY' پر محور باندې يو ټکي چې له مبدا څخه ښکته لوري ته 5 واحده فاصله ولري.

مجهول او متحول



- د تلي تعادل په کوم وزن سره منځ ته راتلی شي؟
- آیا یوازې یو وزن دی چې تله د تعادل په حالت کې راوړلای شي؟
- په یو ه شپه او ورځ کې د تودوخې درجه ثابته ده که متحوله ده؟

فعالیت

لاندې مساوات چې دوه تش ځایونه لري، په پام کې ونیسئ.
تش ځایونه یو پر بل پسې داسې ډک کړئ چې لومړی د مساواتو لومړی تش ځای او بیا دویم تش ځای ډک شي.

لومړی تش ځای دویم تش ځای

$2 \times \square + \square = 9$

- که چېرې په لومړي تش ځای کې د، 1 عدد ولیکل شي، د دویم تش ځای عدد به څو وي؟
- که چېرې په لومړي تش ځای کې د، 2 عدد ولیکل شي د دویم تش ځای عدد پیدا کړئ.
- آیا کولای شو په لومړی تش ځای کې هر عدد ولیکو؟
- آیا د لومړي تش ځای د بدلیدونکو قیمتونو (متحول) په وړاندې او د تېرو معلوماتو نه په ګټه د دویم تش ځای د عدد نوم واخلئ؟

د پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

- د لومړي تش ځای د عدد د ټاکلو لپاره موږ دا امکان درلود چې د خپلې خوښې عدد وټاکو او د هغه لپاره اړیو چې د معادلې د مجهول د حل له مخې د دویم تش ځای قیمت په لاس راوړو.
- که چېرې په یوه مساوات کې د الجبري افادې یوه توری ته د مختلفو قیمتونو د ورکولو امکان موجود وي، نوموړي توری د متحول په نامه یادیږي.
- په عمومي توګه که چېرې متحول د اختیاري بدلوونکو وړ نه وي مجهول بلل کیږي.

مثال: د $2x - y = 1$ په مساوات کې د x د متحول د قیمتونو له مخې په لاندې جدول کې د y مجهول قیمت په لاس راځي:

د مثال په توګه: د $x = -3$ لپاره د $y = 2 \times (-3) - 1 = -7$ کېږي.

د x متحول قیمتونه	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
د y مجهول قیمتونه	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	0	-2

تمرین

1- یو متحول او یو مجهول یو له بل سره څه توپیر لري؟ په مثال کې یې څرګند کړئ.

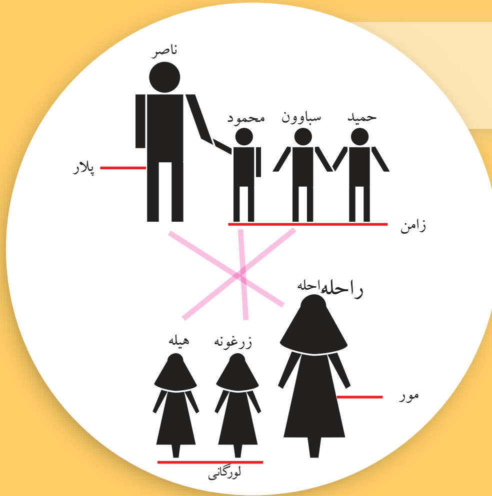
2- د هغو ټکو مرتبې جوړې چې د پورته مثال په جدول کې په لاس راغلي دي د مختصاتو په سیستم کې یې وټاکئ، نومورې ټکې یو له بل سره ونښلوئ.

3- د $2x - y = 7$ په مساوات کې د x متحول لپاره ځینې قیمتونه درکړل شوي دي، په نوموړي مساوات کې د x قیمتونو په اېښودلو سره د y مجهول قیمت په لاس راوړئ:

x	-3	-2	-1	1	2
y					

رابطــه

خـوک لـه چا سـره څـه ډول اړیکه یا رابطه لري؟



فعالیت

پورته شکل په پام کې ونیسئ، هغه اړیکې چې د یوې کورنۍ د غړو ترمنځ شته دي د هغو له مخې لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ:

- راحله د ناصر مېرمن ده، حمید له ناصر سره څه اړیکې لري؟
- محمود د ناصر زوی دی، راحله او حمید څه رابطه لري؟
- هیله د سباوون خور ده، آیا سباوون د هیلې ورور دی؟
- زرغونه د هیلې خور او زرغونه د محمود خور هم ده، نو هیله د محمود سره څه اړیکې لري؟
- د کورنۍ د غړو د اړیکو لپاره ځو نور مثالونه چې د کورنۍ خپلوی وښیې، وواياست.

کولای شو د پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راوړو؟

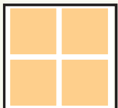
که چېرې د دوو شیانو، جسمونو او یا دوو سیټونو د عناصرو ترمنځ د ریاضي د عملیو په واسطه او یا د کومې ټولنیزې اړیکې ترمنځ شتوالي ولري رابطه بلل کیږي.

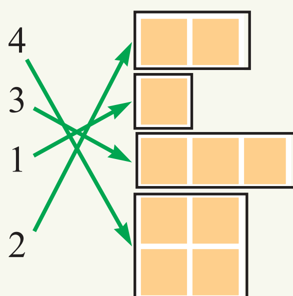
لومړی مثال: د 1،2،3 او 4 عددونو او مخامخ مربع گانو د شمېر ترمنځ یوه رابطه پیدا کړئ:

4 

3 

1 

2 



دويم مثال: که چېرې ځانګه 26 کلنه او سپوږمۍ 16 کاله عمر ولري د 5 ، 10 او 15 کلونو وروسته به ځانګه او سپوږمۍ څو کاله عمر ولري؟

د انجيلا عمر	16	21	26	31
د نسرين عمر	26	31	36	41

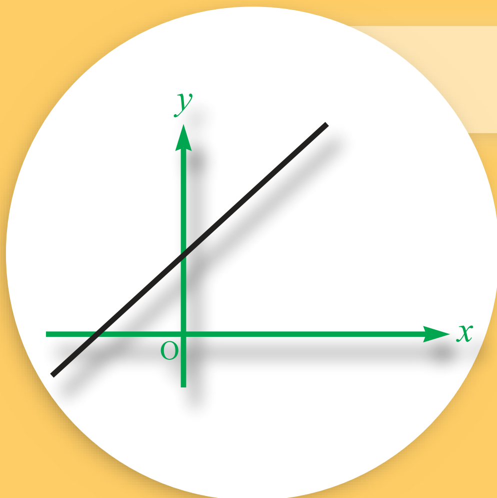
که چېرې د مختصاتو په سيستم کې د سپوږمۍ د عمر ګراف نظر د ځانګې عمر ته رسم کړو، نو يو مستقيم خط دی، له دې امله د سپوږمۍ او ځانګې د عمرونو ترمنځ رابطه يا اړيکه يوه خطي رابطه ده.

تمرين

1- د خپلو ټولګيوالو يو سيټ سپوږمۍ چې 5 عنصره او هم د مختلفو مېوو يوسيټ، چې 5 عنصره ولري، جوړ کړئ د خپل هر ټولګيوال نوم د هغه دخوښې وړ مېوې سره په جوړه ييز ډول په قوس کې وليکئ.

2- د 1، 2، 3، 4، 5، 6 او 8 عددونو په پام کې ونيسئ، د مساوي رابطې په واسطه هغه عددونه پيدا کړئ چې جذرالمربع يې مساوي له يو پورتني عدد سره وي، لکه: $\sqrt{25} = 5$ دی.

خطي رابطه



که چېرې د يوې رابطې ګراف مستقيم خط وي د x او y تر منځ رابطې ته څه وايي؟

فعاليت

محمود 20 کلن و چې نجلا لور يې وزېږېدله.

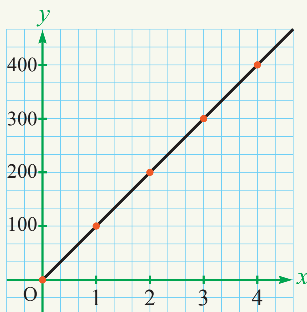
- کوم وخت چې نجلا په 7 کلنۍ کې ښوونځي ته شامله شوه ويلی شئ چې محمود څو کلن وو؟
- کله چې نجلا 20 کلنه شي پلار به يې څو کلن وي؟
- د نجلا او پلار د عمرونو په پام کې نيولو سره لاندې جدول بشپړ کړئ:

د نجلا عمر			7		15
د محمودعمر	20	23		29	

- د نجلا د عمر ګراف نظر د محمود عمر ته د قايمو مختصاتو په سيستم کې رسم کړئ.
- که چېرې محمود 24 کلن وي، د ګراف له مخې يې پيدا کړئ چې نجلا څو کلنه ده؟
- د محمود او نجلا د عمرونو ترمنځ څه ډول رابطه شته دی؟
- که چېرې د محمود عمر په y او د نجلا عمر په x سره وښيو، د محمود او نجلا د عمرونو ترمنځ رابطه د يوې الجبري افادې په واسطه وليکئ.

د پورته فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راوړو:

که چېرې د يوې رابطې ګراف مستقيم خط وي، په دې صورت کې د متحولينو تر منځ رابطه خطي رابطه بلل کېږي.



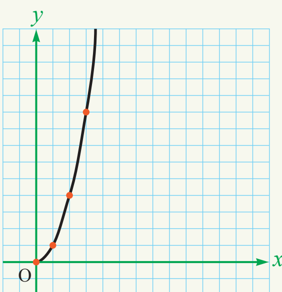
لومړی مثال: که چیرې د کابل او هرات تر منځ واټن په منځني چټکتیا سره په یوه ساعت کې 100Km ووهو څه ډول رابطه ده؟

حل: لومړی د وهل شوي واټن رابطه نظر وخت ته په لاندې جدول کې لیکو:

وخت په ساعت	0	1	2	3	4
واټن په کیلومتر	0	100	200	300	400

که چیرې پورتنی مرتبې جوړې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې په نښه او یو له بل سره ونښلوو، لیدل کیږي چې یو مستقیم خط منځ ته راځي. له دې امله د منځنی چټکتیا او وهل شوي واټن تر منځ رابطه یوه خطي رابطه ده.

دویم مثال: د یوې مربع د اضلاعو د اوږدوالي او مساحت ترمنځ رابطه په پام کې ونیسئ، ددې لپاره که چیرې د مربع ضلع په a او مساحت یې په a^2 سره وښیو، د a مختلفو قیمتونو لپاره د مساحت مختلف قیمتونه په لاس راوړو چې په لاندې جدول کې لیکل شوي دي.



a د مربع ضلع	1	2	3	4	5
a^2 د مربع مساحت	1	4	9	16	25

پورتنی ټکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ او ګراف یې رسم کړئ. آیا ګراف یې یو مستقیم خط دی؟آیا دا یوه خطي رابطه ده؟نه: دا ډول رابطې چې a یعنې د ضلعې اوږدوالی او a^2 یعنې د مربع مساحت خطي نه دی چې د غیر خطي رابطې په نامه یادیږي.

تمرین

1- د یوه فنر اوږدوالی چې وزن وربانديې ځوړند دی، 10cm دی، که چیرې m کیلوګرامه وزن وربانديې ځوړند کړو د فنر اوږدوالی د $L = 10 + 0.5 \times m$ رابطې په واسطه په لاس راځي.

a) د 4 کیلوګرامه وزن لپاره د فنر اوږدوالی څومره دی؟

b) په فنر باندې څومره وزن ځوړند شي چې د فنر اوږداولی 15 سانتي مترو ته ورسیږي؟

2- د یوه نوي زیږېدلي مار اوږدوالی 30 سانتي‌متره دی. که چیرې هر کال په منځنی توګه د نوی زیږېدلي مار اوږدوالی 22 سانتي‌متره زیات شي، نو په څومره وخت کې به د نوموړي مار اوږدوالی 96 سانتي متره شي؟



د خطي رابطو جوړښت

د 100 پوکڼیو پلورل به څومره ګټه ولري؟

فعالیت

ددې لپاره چې احمد د خپل قلم او کاغذ پيسې پیدا کړي د خپلې مور په مشورې سره تصمیم نیسي چې په ښار کې له غرمې وروسته هوایي پوکڼۍ وپلوري که چېرې احمد د 100 دانو پوکڼیو د رانیولو لپاره 260 افغانۍ ورکړي او سربېره پر هغه 20 افغانۍ د ډوډۍ خوړلو او 20 افغانۍ د ترانسپورټ کرایه ورکړي په دې صورت کې تصمیم نیسي چې هره پوکڼۍ په 6 افغانیو وپلوري.
د پوښتنې د ارزونې لپاره دا موضوع د ریاضي له ښوونکي سره ګډه او ښوونکي هغه ته مشوره ورکوي تر څو د پوکڼیو د شمېر معادلې نظر ټول لګښت او ګټې ته د پلورلو له مخې جوړ او د دواړو حالتو ګرافونه یو له بل سره پرتله کړي. د ګراف د تحلیل او پوښتنې په ارزونه کې د ځوابونو د فعالیت په بشپړ ولو کې له احمد سره مرسته وکړئ.

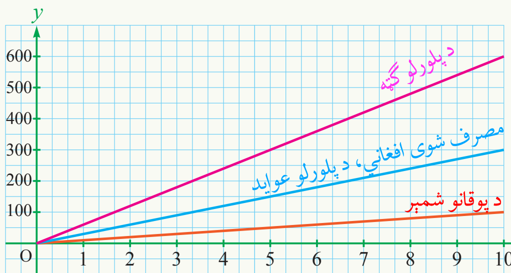
- د څو دانو پوکڼیو له پلورلو وروسته د پلورلو عواید له ټول لګښت سره مساوي کېږي؟
- د ټول جدول مصرف چې د 100 دانو پوکڼیو لپاره چې ټولې 300 افغانۍ لګېدلې دي بشپړ کړئ:

د پوکڼیو شمېر	0	10		30	40		60	70			100
لګیدلی افغانۍ	0	30	60			150			240	270	

- که چېرې x د پوکڼیو شمېر او y د لګښت اندازه وي د پوکڼیو د لګښت الجبري رابطه په لاس راوړئ او ګراف یې د قایمو مختصاتو په سیستم کې رسم کړئ.

لکه د ټول لګښت جدول د پلورلو لاندې جدول د پوکڼیو د پلورلو عوایدو له مخې بشپړ کړئ.

د پوکنیو شمېر	0	10			40			70		90	100
لګېدلې افغانۍ	0		60			150			240		
د پلورلو عواید	0	60		180			360				
د پلورلو ګټه	0		60								



• د ګرافونو د تقاطع په ټکي کې ګټه او لګښت یو له بل سره څه ډول رابطه یا اړیکه لري؟

•څو دانې پوکنۍ وپلورل شي، تر څو د پلورلو او لګښت اندازه سره برابره شي؟ دا غوښتنه د ګراف له مخې څه معنا ورکوي.

له پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

د دوو خطي معادلو حل، د هغو د ګراف د تقاطع له نقطې څخه عبارت دي، ځکه چې په هغو کې x او y یعني فاصله او ترتیب په دواړه معادلو کې مساوي یا یو ډول دي.

تمرین

1- یو رستوانت د یو شرکت لپاره ډوډۍ پخوي. دا رستورانت 1000 افغانۍ یو کال مخکې او سربېره پر هغه په هره میاشت کې 600 افغانۍ غوښتې دي. بل رستورانت د مخکنۍ غوښتنې پرته د میاشتې 850 افغانۍ غوښتې دي. لاندې جدول بشپړ کړئ.

میاشتې	وری	غویی	غبرګولی	چنګاښ	زمری	وږی	تله	لړم	لیندۍ	مرغومی	سلواغه	کب
لومړی رستورانت												
دویم رستورانت												

دې دوو رستورانتونو ته د پیسو ورکولو ګراف د قایمو مختصاتو په یو سیستم کې رسم کړئ که چېرې 6 میاشتې ډوډۍ وغواړو کوم یو رستورانت زموږ په ګټه دی.

تابع



- که چېرې د یوه موټر چټکتیا $50\frac{Km}{h}$ وي:
  – په دوو ساعتونو کې څومره واټن وهي؟
  – په درې ساعتونو کې څومره واټن وهي؟
- آیا وېلای شئ چې د هر وخت لپاره یو ځانګړی واټن په یوه ټاکلې چټکتیا پورې اړه لري؟

فعالیت

اوس د یوه موټر د چټکتیا او وهل شوي واټن تر منځ رابطه نظر وخت ته په پام کې نیسو:

- که چېرې یو موټر د $60\frac{Km}{h}$ په ثابتې چټکتیا سره حرکت وکړي، لاندې جدول د درکړل شوي وختونو په پام کې نیولو سره د وهل شوي فاصلې لپاره بشپړ کړئ:

t	1h	2h	3h	4h	5h	6h
x						

- د لاس ته راغلو مرتبو جوړوو لپاره که چېرې پورته رابطه د قایمو مختصاتو په سیستم کې، په داسې حال کې چې وخت یعنې د t لپاره عمودي محور او د x وهل شوی واټن لپاره افقي محور په پام کې ونیسو د هغو ګراف رسم کړئ.
- آیا وېلای ای شئ چې د هر راکړ شوي وخت لپاره یو ځانګړی واټن وجود لري؟
- که چېرې په پورته رابطه کې t یو مستقل متحول وي په دې حالت کې د کوم کمیت قیمتونه د هغه تابع دي.

له پورته فعالیت څخه لاندې تعریف لاس ته راوړو:

– د دوو سیټونو د عناصرو تر منځ داسې یوه رابطه چې د متحول هرقیمت لپاره یوازې یو قیمت یا د متحول هر قیمت یوازې د یوه عدد سره ارتباط ولري تابع، بلل کېږي.

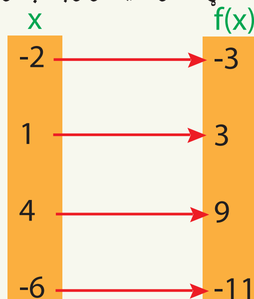
– د قیمتونو ناحیه چې مستقل متحول پکې قیمتونه اخلي د تعریف ناحیه (Domain) بلل کېږي.
د ناحیې هغه قیمتونه، چې د تعریف د ناحیې څخه د مجهول لپاره په لاس راځي، د قیمتونو ناحیه (Codomain) په نامه یادېږي.

که چېرې د يوې تابع د تعريف ناحيه A او د قيمتونو ناحيه B وي په دې صورت کې y تابع د x بلل کېږي او داسې ليکل کېږي: y=f(x)

مثال: د $f(x)=2x+1$ تابع د 2- ، 1 ، 4 ، 6-=x قيمتونو په واسطه وښاياست چې f يوه تابع ده.

حل: په تابع کې د راکړل شوو قيمتونو په اېښودلو سره دتابع قيمتونه په لاندې ډول په لاس راځي:

$$f(x)=2x+1$$
$$f(-2)=2(-2)+1=-3$$
$$f(1)=2(1)+1=3$$
$$f(4)=2(4)+1=9$$
$$f(-6)=2(-6)+1=-11$$

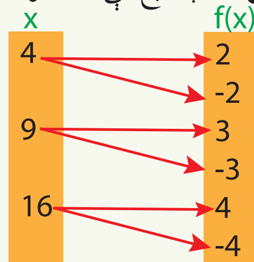


له پورته شکل څخه ښکاري چې د تعريف په ناحيه کې دمتحول د هر قيمت لپاره يو قيمت دقيمتونو په ناحيه کې شته دي، نو د تابع دتعريف له مخې f يوه تابع ده او د لاندې پايله په لاس راوړو:
هره الجبري افاده چې د $y=ax+b$ شکل ولري يا په بل عبارت هره خطي رابطه د تابع په نامه يادېږي.

مثال: که چېرې د 4، 9 او 16 قيمتونه د $f(x)=\sqrt{x}$ تابع لپاره درکړل شوي وي آيا f يوه تابع ده او که نه؟

حل: د f په تابع کې د متحول د قيمتونو په اېښودلو سره د تابع قيمتونه په لاس راوړو:

$$F(x)=\pm\sqrt{x}$$
$$F(x)=\sqrt{4}=\pm2$$
$$F(9)=\pm\sqrt{9}=\pm3$$
$$F(16)=\pm\sqrt{16}=\pm4$$



په پورته شکل کې ليدل کېږي چې د x د سټ دهر عنصر لپاره د $f(x)$ په سيټ کې دوه قيمتونه دي، نو له دې امله د تابع د تعريف له مخې f يوه تابع نه ده.

تمرين

آيا د $f(x)=\frac{4}{3}x$ تابع د 0، 1، 2، 3 او 3- درکړل شوو قيمتونو لپاره يوه تابع ده؟

د نهم فصل مهم ټکي

ټکی په مستوي کې: کولای شو د قایمو وضعیه کمیاتو د یو سیستم په واسطه یو ټکی تعریف کړو چې د (x,y) دوو مختصو په واسطه چې د فاصلې او ترتیب په نامه یادیږي وټاکل شي.

د قایمو مختصاتو سیستم:دوه عمود محورونه د ́xx او ́yy چې یو بل د O په ټکی کې قطع کوي دقایمو مختصاتو سیستم په نامه یادیږي، او د (x,y) هرې مرتبې جوړې سره د مستوي یو ټکی اړیکې لري.

د x ټکې د فاصلې او y د ترتیب په نامه یادیږي، د هغو قیمتونه د محورونو له مخې چې په مساوي واحدونو سره ویشل شوي دي، ټاکل کیږي.

په مستوي کې د یوه ټکې مختصات: د قایمو مختصاتو په یوه مستوي کې د P هر ټکې یوازې د P(x,y) یوه مرتبه جوړه عددونه او برعکس (سرچپه) دقایمو مختصاتو په مستوي کې د P(x,y) هره مرتبه جوړه عددونه یوازې د P یو ټکې ټاکلی شي.

مجهول او متحول: که چیرې په یوه مساوات کې د الجبري افادې د یوه جز دبدلون امکان یو عدداو یا بل هر عدد سره شتون ولري متحول بلل کیږي.

که چیرې په کلې ډول متحول د خوښې سره سم اختیاري بدلون منونکي نه وي، مجهول بلل کیږي.

رابطــه: که چیرې د دوو شیانو، جسمونو یا د دوو سیټونو دعناصرو ترمنځ د ریاضي د عملیو په واسطه او یا د کومو ټولنیزو اړیکو د ترون ترمنځ شتوالی ولري رابطه بلل کیږي.

خطي رابطه: که چیرې د یوې رابطې ګراف مستقیم خط وي په دې صورت کې د متحولینو تر منځ خطي رابطه بلل کیږي.

د خطي رابطو جوړښت: د هغو خطي رابطو شمیر چې ګرافونه یې یو مستقیم خط جوړ کړي او د شفاهي وینا په واسطه وویل شي د الجبري افادې د رابطو په واسطه ښودل کیږي او حل یې پیدا کیږي، دا ټول پړاوونه د خطي رابطو جوړښت په نامه یادیږي چې په حقیقت کې په ورځني ژوند کې د خطي معادلو تطبیق کول دي.

تابع: د دوو سیټونو د عناصرو تر منځ رابطه څرنګه چې په نوموړې رابطه کې د متحول د هر قیمت لپاره د تابع یو قمیت څرګندوي، نو په دې صورت کې د تابع په نامه یادیږي.

1- لاندې درکړل شوي ټکي دقايمو مختصاتو په سيستم کې وټاکئ:

$D(-1,4)$ $C(4,-1)$ $B(3,-5)$ $A(1,5)$

2- د 3 ټکو مختصات داسې پيدا کړئ چې د مساوي ترتيب لرونکي، خو نوموړي ټکي يو پر بل باندې پراته نه وي.

3- دمتساوي الساقين مثلث د راسونو مختصات پيدا کړئ چې يو راس يې د $y = 5$ د y پر محور باندې او دوه نور راسونه يې د x پر محور باندې وي، په داسې حال کې د قاعدې اوږدوالی 9 واحده دی؟

4- د $A = \{1,2,3,4\}$ او $B = \{5,6,7,8\}$ سيټونو د عناصرو ترمنځ يوه رابطه د ګراف په واسطه رسم کړئ.

5- د A له سټ څخه د B سټ ته د هر عنصر لپاره يوه رابطه د "<"نښې په واسطه تعريف کړئ د درکړل شوو سيټونو په پام کې نيولو سره په 4 مثال کې د A او B سيټونو د عنصرونو لپاره د "<" نښې په واسطه مثال وليکئ ؟ (مثلاً $1<5$ دی) آيا برعکس رابطه هم شتوالی لري.

6- لاندې معادلې حل کړئ:

a) $5x - 5 = 5$ b) $3x + 8 = 23$

c) $7x - 2 = 19$ d) $x + \frac{1}{2} = 4$

7- ملالی له خپلې مور څخه 25 کاله کوچنۍ ده. که چېرې د نرګس او مور د عمرونو مجموعه 41 کاله وي، نرګس څو کلنه ده؟

8- زلمي او نصير 36 ټوکه کتابونه ولوستل، که چېرې زلمي له نصير څخه 6 ټوکه زيات لوستلي وي معلوم کړئ چې هر يوه څو ټوکه کتابونه لوستلي دي؟

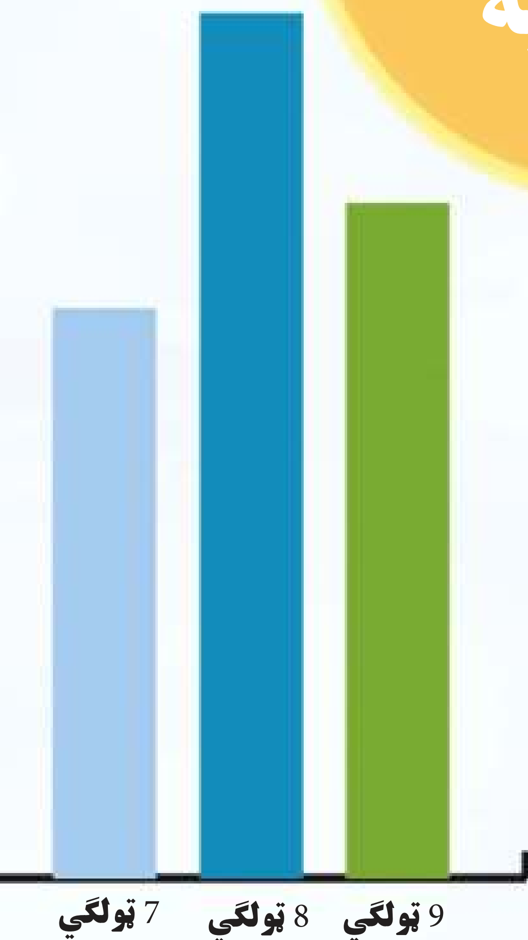
9- يو توپ ټوکر 30 متره دی، 7 جوړې کالي يې ورڅخه ګنډلي دي که چېرې 2 متره ټوکر ورڅخه پاتې وي، نو د هرې جوړې کاليو لپاره څومتره ټوکر مصرف شوي دي؟

10- که چېرې د يوه عدد له 3 برابر سره د 4 عدد زيات شي د 10 سره مساوي کېږي عدد څو دی؟

11- که چېرې د يوه عدد له دوه برابر څخه 5 منفي شي مساوي د خپل عدد سره کېږي عدد کوم دی؟

لسم فصل

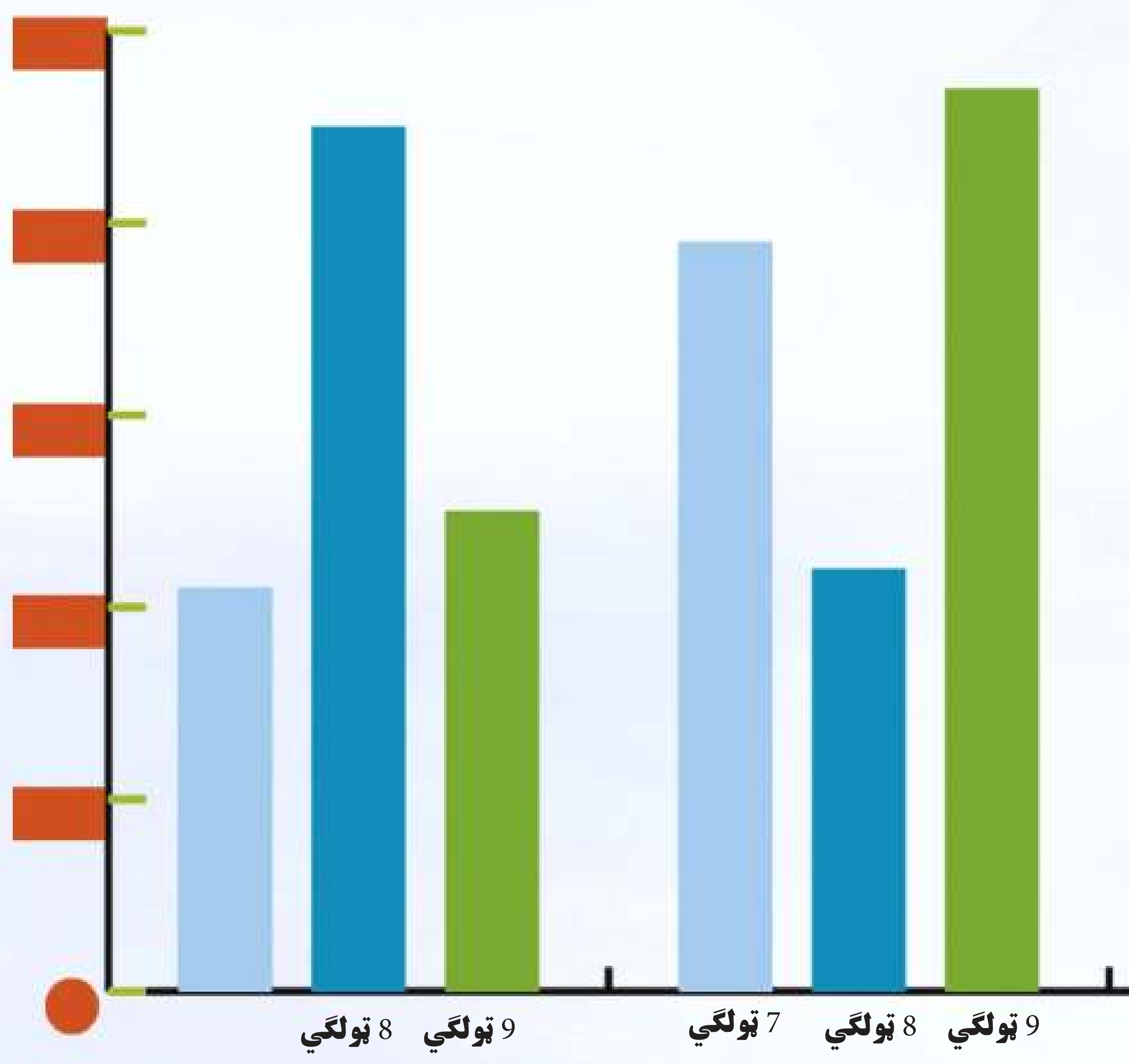
احصایه



د 9 ټولګي د زده کوونکو شمېر

د 8 ټولګي د زده کوونکو شمېر

د 7 ټولګي د زده کوونکو شمېر



د زده کوونکو شمېر
8 ټولګي
9 ټولګي
7 ټولګي
8 ټولګي
9 ټولګي

د منفصلې ډېټا د کثرت جدول



یو سړی غواړي له کابل څخه مزارشریف ته لاړ شي. د لارې په اړه له یوه لاروي څخه معلومات غواړي.

لاروی: له کابل نه کاریزمیر ته، له کاریزمیر نه قلعه مراد بیک، له قلعه مراد بیک نه سرای خواجې،...، له چاریکار نه جبل السراج ته او ...،

اوریدونکی ددې معلوماتو په اورېدو ګیچ شو.

آیا لاروي نه شو کولای چې دغه ځواب په لنډو جزیاتو ورکړي؟

فعالیت

د ریاضي په مضمون کې د یوه ټولګي د زده کوونکو نمرې په دې ډول لیکل شوې دي:

88	58	51	59	67	48	35	30	25	42
43	56	91	72	78	75	56	48	77	82
20	47	95	42	100	82	63	57	53	94
96	83	92	76	26	75	12	62	40	59

- که وغواړو چې د پورتنیو معلوماتو (ډېټا) د کثرت جدول جوړ کړو، آیا دا به ښه پرېکړه وي چې د دې کار لپاره له 1 نه تر 100 پورې نمرې ولیکو آیا ستونزه شته؟
- لاندې جدول بشپړ کړئ:

صنف	شمېر f
0 تر 9	
10 تر 19	
20 تر 29	2
30 تر 39	
40 تر 49	
50 تر 59	
60 تر 69	
70 تر 79	
80 تر 89	
90 تر 100	

- د هغې ډېټا شمېر پيداکړئ چې د جدول په پنځم صنف کې راتلای شي.
- د جدول د دويمې کرښې ډېټا يعنې څه؟
- که پورتنۍ ډېټا نه وی، آیا ويلای شو د هغو دوو تنو نمرې چې د 11 او 20 ترمنځ دي، څو دي؟
- څو بېلا بېلې ډېټاوې په هر صنف کې شامليدای شي؟

کله چې د ډېټا شمېر زيات وي او يا په جدول کې د ډېټا د کثرت عدد ډېر کوچنی او يا صفر وي، په دې صورت کې د مجزا د کثرت جدول ډېره مرسته نه شي کولای او يا د هغه د جدول جوړول هم ډېر گران دي، نو ځکه په دې حالت کې د صنف بندی په ډول د کثرت له جدول څخه گټه اخلو. په دې صورت کې د هر صنف کثرت دا راښيي چې په صنف کې څو ډېټاوې شاملې دي، خو موږ نه شو ويلای چې هغه کومې دي.

صنف	شمېره f
0 – 49	13
50 – 59	8
60 – 69	3
70 – 79	6
80 – 89	4
90 – 100	6

مثال: د پورتنيو معلوماتو په رڼاکې لاندې جدول بشپړ کړئ:

لومړی صنف څه شی درښيي؟

له کوم جدول څخه گټه اخيستل به ساده وي؟

که د يوه زده کوونکي نمرې 62 وي په کوم صنف کې راتلای شي؟

په دويم صنف کې د 50 او 59 عدد څه شی راښيي؟

حل: لومړی صنف د هغه شمېر زده کوونکو نمرې راښيي چې نمرې يې له 50 څخه لږې دي او يا نه دي بريالي شوي.

که وغواړو چې پوه شو څو زده کوونکي نه دي بريالي شوي دويم جدول زموږ کار يو څه اسانه کوي، ځکه د لومړي جدول د پنځو صنفونو معلومات (ډېټا) په يوه صنف کې په لنډ ډول ليکل شوي دي.

د 62 عدد په درېيم صنف کې راغلی دی.

په دويم صنف کې 50 د ډېر کوچني عدد او 59 د ډېر لوی عدد ښکارندوی دی چې په نوموړي صنف کې راتلای شي.

تمرين

د لاندې ډېټا د کثرت جدول بشپړ کړئ.

10	40	30	20	8	10
18	30	35	25	14	12
37	29	28	17	15	14

صنف	1 – 9	10 – 19	20 – 29	30 – 39
شمېره f				

د کثرت د جدول د اجزاو خاصیتونه



له هغې وروسته چې ښوونکې د ټولګي زده کوونکي په درېو (ښه، منځنی، او ضعیفو) ډلو (صنفونو) وویشل، د ښې ډلې (صنف) یو زده کوونکي چې 98 نمرې یې درلودلې پوښتنه وکړه، آیا زه له هغه چا سره په کورس کې یو شان یم؟ چې 82 نمرې لري؟

فعالیت

د تېر شوي لوست په رڼا کې د یوه زده کوونکي د ریاضي د مضمون نمرې او د کثرت جدول په پام کې ونیسئ.

ددې ټولګي ښوونکې غواړي زده کوونکو ته نصیحت وکړي چې د مضمون د ښو پایلو د لاسته راوړلو لپاره شخصي کورسونه ونیسي.

ددې کار لپاره ټولګي په درېو (ضعیف، متوسط، ښه) ډلو (ګروپونو یا صنفونو) وویشئ او لاندې جدول بشپړ کړئ:

د زده کوونکو حالت	شمېر f
ضعیف : 0 – 59	
متوسط : 60 – 79	
ښه : 80 – 100	

- د 60 او 80 عددونه څه شئ را ښیي؟
- څو بېلابېلې نمرې په دویم صنف کې راتلای راشي؟
- دا عددونه د 80 او 60 له توپیر سره پرتله کړئ؟
- د هغو زده کوونکو نمرې چې د 80 او 100 ترمنځ دي په کوم صنف کې پرتې دي؟
- آیا دغه کورس چې زده کوونکي پکې ګډون کوي، له هغه کورس سره یو شان دی چې د دویمې صنف زده کوونکي پکې ګډون کوي؟
- آیا هغه کورس چې یو زده کوونکي د 83 نمرو په درلودلو سره په هغې کې ګډون کوي له هغه کورس سره، چې د 93 نمرو په درلودلو سره په کې ګډون کوي او هغه زده کوونکي چې 93 نمرې یې اخیستې دي، یو شان دئ؟

د نمرو ترټولو هغه لږ مقدار چې کولای شي په یوه صنف کې راشي ټیټ سرحد او ترټولو ډېر مقدار ته یې لوړ سرحد وایي، د صنف د ټیټ او لوړ سرحد د ډیټا موقعیت په یوه صنف کې ټاکي یعنې ددې

ښودنه کوي چې ډیټا په کوم صنف کې وي. همداسې ټیټ او لوړ سرحد د یوه صنف پراخوالي چې د نومورو سرحدونو د تفاوت څخه لاسته راځي، ټاکي.
پورتنی فعالیت دا را ښيئ چې کومې ډیټاوې په یوه صنف کې راځي د احصايې له پلوه موږ ته کوم خاص توپير نه لري کولای شو هغه ټولې ډيټاوې يو شان په نظر کې ونيسو او د يو شان ښودلو لپاره يې د هر صنف له اوسط څخه ګټه اخلو .

مثال: د یوه ټولګي د رياضي د مضمون نمرې په لاندې توګه مخامخ ليکل شوي دي.
آيا د برياليتوب او پاتې والي له پلوه هغه هلکان چې 12 نمرې يې تر لاسه کړې وي له هغه زده کوونکي سره کوم توپير لري چې 25 يا 48 نمرې يې اخيستې وي؟
د لومړي، دويم او دريم صنف پراخوالی پيدا کړئ.
حل: هغه زده کوونکو چې 12، 25 او 48 نمرې اخيستي دي، د برياليتوب له پلوه يو تر بله کوم توپير نه لري، ځکه ټول بريالي شوي نه دي.

د رياضي نمرې	f شمېره	د صنف وسط
0 – 49	4	$\frac{0+49}{2}=24.5$
50 – 59	2	$\frac{50+59}{2}=54.5$
60 – 69	7	$\frac{60+69}{2}=64.5$
70 – 79	10	$\frac{70+79}{2}=74.5$
80 – 89	9	$\frac{80+89}{2}=84.5$
90 – 100	8	$\frac{90+100}{2}=95$

د لومړي صنف پراخوالی $= 50-0=50$
د دويم صنف پراخوالی $= 60-50=10$
د دريم صنف پراخوالی $= 70-60=10$

کولای شو چې د هر صنف لپاره داسې ووايو:
څلور تنو زده کوونکو 24,5 نمرې، 2 تنو 54,5 نمرې، 7 تنو 64,5 نمرې، 10 تنو 74,5، 9 تنو 84,5 نمرې او 8 تنو 95 نمرې اخيستې دي.
دا ضرور نه ده چې د هر صنف پراخوالی دې يو تر بله مساوي وي. د صنف پراخوالی په دې پورې اړه لري چې صنف بندي د کوم مطلب لپاره کوو او څه معلومات ترې اخيستې شو، لکه: د تېر شوي مثال په صنف بندي کې مو وغوښتل چې د شخصي کورس زده کوونکي په درې برخو ووېشو.

تمرين

لاندې جدول بشپړ کړئ:

د هر صنف ډيټا	صنف	د صنف پراخوالی	دصنف وسط
16 , 16.5 , 17 , 17.5	16 – 18		
18 , 18.5 , 19.5 , 20	18 – 20		

ډله ییز (تجمعي) کثرت



څنګه پوهېدلای شو چې د زمري د میاشتې تر پایه څو ورځې رخصتي لرو؟

فعالیت

د یوې کلیزې په مرسته لاندې جدول ډک کړئ:

- د وري په میاشت کې څو ورځې رخصتي لرو؟
- د غویي په میاشت کې څو ورځې رخصتي لرو؟
- د غبرګولي په میاشت کې څو ورځې رخصتي لرو؟
- د کال له پیل څخه د غبرګولي تر پایه څو ورځې رخصتي لرو؟
- د پورتني کثرت د جدول دریم ستون داسې ډک کړئ چې په هر سطر کې د همغه صنفونو کثرت او د مخکنیو صنفونو کثرت یو له بل سره جمع شوی وي.

د کال میاشتې	جمعي او د رخصتیو ورځې	دریم ستون
وری		
غویی		
غبرګولی		
چنګاښ		
زمری		
وږی		
تله		
لړم		
لیندۍ		
مرغومی		
سلواغه		
کب		

• آیا ددې ستون په مرسته په اسانۍ سره ویلای شئ چې د غبرګولی تر پایه څو ورځې رخصتي لرئ؟
• په دریم ستون کې د کرښې ورستی عدد څو دی؟ د غه عدد څه شی راښیي؟

په پورتني فعالیت کې د هرې میاشتې د رخصتیو ورځو شمیره د مطلق کثرت په نامه یادېږي. د دغې دورې تر پایه د رخصت ورځو شمېره د ډله ییز (تجمعي) کثرت په نامه یادېږي. د هر صنف ډله ییز کثرت مساوي دی د هغه صنف د مطلق کثرت او د هغې د مخکینیو صنفونو د مطلق کثرت مجموعې سره.

مثال: یوې کار خانې اعلان وکړ، که چېرې زموږ د کار خانې په جوړو شوو توکو کې که کومې ستونزې پیدا شوې، پلورونکي کولای شي چې دغه توکي د بیا جوړولو لپاره بېرته کارخانې ته راواستوي.

مطلق کثرت (د مسترد شوو کالیو شمېر)	وروسته له پلورلو میاشتې
3	10 – 13
6	13 – 16
7	16 – 19
4	19 – 22

دغه جدول د هغو پلورل شوو توکو شمېره راښیي چې د جوړولو لپاره بېرته کار خانې ته استول شوي دي.

16 میاشتې وروسته څو توکي د جوړولو لپاره کارخانې ته استول شوي دي؟ د 16 او 19 میاشتو ترمنځ څو توکي د بیا جوړولو لپاره استول شوي دي؟

حل: ډله ییز کثرت یې پیداکوو. د دویم سطر په پام کې نیولو سره وینو چې په لومړیو 16 میاشتو کې 9 توکي او د 16 او 19 میاشتو ترمنځ 7 توکي د بیا جوړولو لپاره را استول شوي دي. که چېرې دغه عدد مو نه پېژندلای. موږ کولای شول چې د ډله ییز کثرت په مرسته یې داسې پیداکړو: $16 - 9 = 7$

ډله ییز کثرت	مطلق کثرت	صنف
3	3	10 – 13
6 + 3 = 9	6	13 – 16
9 + 7 = 16	7	16 – 19
16 + 4 = 20	4	19 – 22

تمرین

لاندې جدول بشپړ کړئ:

ډله ییز کثرت	مطلق کثرت	صنف
	3	10 – 15
	2	15 – 20
	4	20 – 25
	7	25 – 30
	6	30 – 35
	5	35 – 40

نسبي کثرت



د دوو بېلو ښوونځيو زده کوونکو ملالۍ او درخانۍ په خپل منځ کې خبرې کولې:
درخانۍ: زموږ په ټولګي کې 37 تنه بريالي شوي دي.
ملالۍ: زموږ په ټولګي کې 30 تنه بريالي شوي دي.
آيا د کوم ټولګي لوست به ښه وي؟

فعاليت

د يوه ښوونځي په (الف) ټولګي کې 40 تنه او په (ب) ټولګي کې 35 تنه زده کوونکي شته، د رياضي په مضمون کې د (الف) د ټولګي 32 تنه او د (ب) د ټولګي 30 تنه بريالي شوي دي.

- د (الف) ټولګي د برياليو زده کوونکو نسبت له ټولو زده کوونکو سره څو دی؟
- د (ب) ټولګي د برياليو زده کوونکو نسبت له ټولو زده کوونکو سره څو دی؟
- د دې دواړو نسبتونو له پرتله کولو وروسته ووايئ چې د کوم ټولګي زده کوونکو ښه لوست ويلی دی.
- آيا د دواړو ټولګيو د برياليو زده کوونکو په پرتلې، کولای شئ دا ځواب ووايئ؟

پورتنی فعاليت دا را څرګندوي چې په ځينو حالتونو کې د دوو وضعيتونو، د پرتلې کولو لپاره نشو کولای چې مطلق کثرتونه سره پرتله کړو. په داسې حالتونو کې د $\frac{\text{مطلق کثرت}}{\text{د ټولې ډېټا کثرت}}$ له نسبت څخه ګټه اخلو.

ددې نسبت لاس ته راغلې قيمت ته نسبي کثرت وايو، او د لا ښه پرتله کولو لپاره دغه عدد په فيصدی ښيو چې د نسبي کثرت د فيصدي په نامه يادېږي.

مثال: په يوه ازموينه کې د دوو ټولګيو نمرې په لاندې جدول کې راوړل شوي دي. دا دوه ټولګي سره پرتله کړئ.

مطلق کثرت	د (ب) ټولګی
19	ضعیف 10 – 30
25	متوسط 30 – 50
16	ښه 50 – 70

مطلق کثرت	د (الف) ټولګی
6	ضعیف 10 – 30
10	متوسط 30 – 50
4	ښه 50 – 70

حل: څرنګه چې وینو ددې دواړو ټولګیو د زده کوونکو مجموعي شمېر په جدول کې سره مساوي نه دی نو ځکه نه شو کولای چې د دواړو صنفونو مطلق کثرت سره پرتله کړو.
ددې کار لپاره لومړی د دواړو صنفونو نسبي کثرت پیدا کوو. وینو چې ضعیف زده کوونکي په دواړو ټولګیو کې تقریبا سره نژدې دي، مګر د (الف) ټولګي متوسط زده کوونکي څه نا څه بهتر دي.

د ب ټولګی	مطلق کثرت	نسبي کثرت	د نسبي کثرت فیصدي
10 – 36	19	$\frac{19}{60}$	31.6%
30 – 50	25	$\frac{25}{60}$	41.6%
50 – 70	16	$\frac{16}{60}$	26.6%

د الف ټولګی	مطلق کثرت	نسبي کثرت	د نسبي کثرت فیصدي
10 – 36	6	$\frac{6}{20}$	30%
30 – 50	10	$\frac{10}{20}$	50%
50 – 70	4	$\frac{4}{20}$	20%

تمرین

لاندې جدول بشپړ کړئ:

د الف ټولګی	مطلق کثرت	نسبي کثرت	د نسبي کثرت فیصدي
5 – 10	2		
10 – 15	3		
15 – 20	1		
20 – 25	4		
25 – 30	6		

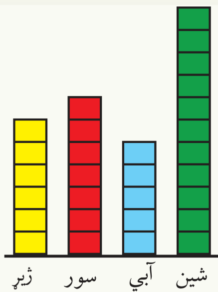
میله يي ګراف

په انځور کې هغه ونې وينئ چې ټولې له يوه ډوله دي تاسې ويلای شئ چې د لوړوالي له مخې د کومې يوې عمر ډېر دی؟



فعاليت

د يوه ښوونځي له زده کوونکو څخه پوښتنه وشوه چې د خپلې خوښې د موټر رنګ ووايئ.
د دوی د ځرګندونو پايله مو د ګراف په څېر په مخامخ شکل کې لنډه کړې ده.

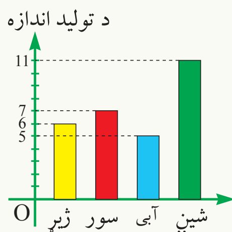


- په هره ميله کې د مربعو شمېر څه شی ځرګندوي؟
- د شکل له مخې ووايئ چې څو تنو ژيړ رنګ غوره کړی دی؟
- کوم رنګ له ټولو نه لږ ټاکل شوی دی؟
- که چېرې د هر ستون لاندې رنګونه، نه وي ليکل شوی آيا تاسې کولای شول چې لازم معلومات ترلاسه کړئ.
- که د ګراف لاندې عبارت نه وای آيا يوازې د ګراف په ليدلو تاسې کولای شول ووايئ چې ګراف د څه شي په اړه دی؟

لاندې جدول راکړ شوی دی کوښښ وکړئ چې ګراف يې رسم کړئ.

شين	ژيړ	آبي	سور
11	6	5	7

- دغه ګراف ته وګورئ:



• آیا کولای شئ د پورتني جدول څرګندوني په دغه ګراف کې په آسانی سره وګورئ؟
• په لومړي ګراف کې مو ولې د مربع ګانو څخه ګټه اخیستي ده؟ او په دویم ګراف کې مو دا کار نه دی کړئ؟
• د ګراف په لیدو او د میلو د اوږدوالي په پرتله کولو سره په ترتیب ووایي چې کوم رنګونه زده کوونکو ډېر غوره کړي دي؟
• آیا د ګراف په رسمولو کې د ډیټا د ځای تغیر د اطلاعاتو په تفسیر کې توپیر راوړی شي؟

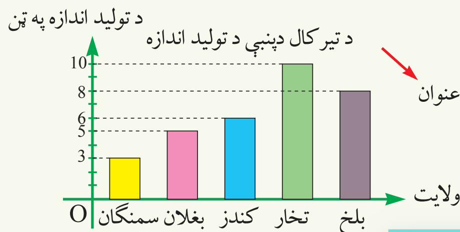
د فعالیت په پیل کې که چېرې تاسې دغه پوښتنه نه وی لوستلې، آیا تاسې ویلای شول چې دا رنګ څه شی راښیي. څرنګه وراندیز کوئ. پورتنی ګراف، میله یي ګراف نومېږي. یو میله یي ګراف باید د سر لیک، مقیاس او د محور مشخصې لرونکی وي. په میله یې ګراف کې د ډیټا ځای مهم نه دی، د میلي اوږدوالی د ډیټا کثرت را ښیي او د میلو ترمنځ فاصله باید سره مساوي وي.

مثال: په لاندې جدول کې د هېواد د پنځو ولایتونو د پنبې د تولید اندازه د ټن په حساب راکړشوې ده.

ولایتونه	بلخ	تخار	کندز	بغلان	سمنګان
د تولید اندازه f	8	10	6	5	3

د هر ولایت تولید د میله یې ګراف په ډول وښیئ. کوم ولایت ډېر تولید لري؟

حل:



تمرین

1- د میله یي ګراف د رسمولو لپاره کومو معلوماتو ته اړتیا لرئ؟
2- د یوه ښوونځي د ورزشي ټیمونو شمېر په لاندې جدول کې درکړ شوې دی:

ورزشي ټیمونه	باسکټبال	واليبال	فوټبال	منډه
د لوبغاړو شمېر f	8	12	11	6

میله یي ګراف یې رسم کړئ.

د منکسرې کرښې ګراف

دا ګرافونه ډاکټران څنګه تفسیروي؟



فعالیت

د مزار شریف د ښار د هوا پېژندنې ادارې د ورې په میاشت کې د یوې شپې او ورځې د تودوخې درجه د سانتي ګرېډ په حساب په لاندې جدول کې اعلان کړې ده.

د شپې وروسته له 12	د شپې 8	د ماسپښین 6	د ورځې 11	د سهار 8	د سهار 5	د شپې 12
18	23	21	28	25	20	15

پورتنی ډیټا د راکړل شوو مختصاتو پر بنسټ د مستوي پرمخ د ټکو په بڼه وښیئ. دغه ټکي په مستقیمې کرښې سره وصل کړئ.
د ګراف له مخې لاندې پوښتنو ته ځواب ووایئ.
• د تودوخې ډېره لوړه او ډېره ټیټه درجه په کومو ساعتونو کې وه؟
• په کوم ساعت کې د تودوخې درجه د 25 درجو نه پورته شوې وه؟
• د کومو ساعتونو ترمنځ د تودوخې د درجې بدلون ډېر وو.

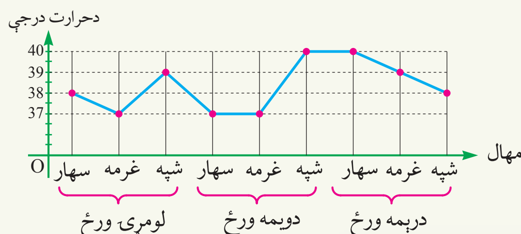
له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي

نوموړی فعالیت دا راښيي چې کولای شو را ټول شوي معلومات (ډیټا) د ټکو په مرسته د مختصاتو په مستوي کې رسم کړو او بیا دغه ټکي د مستقیمو کرښو په مرسته یو تر بله سره ونښلوو. کوم ګراف چې د ټکو د نښلولو په مرسته په لاس راځي د منکسرې کرښې ګراف په نامه یادیږي.

مثال: یو ډاکټر د رنځور تبه په درې پر له پسې ورځو کې تر څېړنې لاندې ونیوله. د تودوخې د درجې د بدلون ګراف یې رسم کړئ.

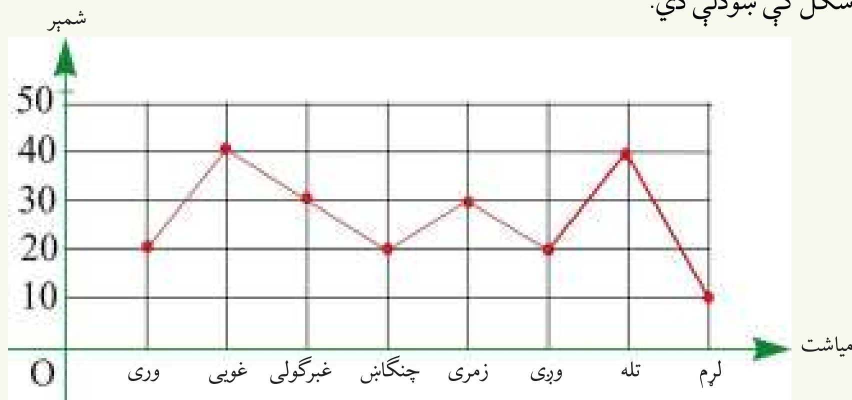
حل: په لاندې جدول کې دغه ډیټاوې راکړل شوي دي.

درېمه ورځ			دویمه ورځ			لومړۍ ورځ		
شپه	غرمه	سهار	شپه	غرمه	سهار	شپه	غرمه	سهار
38	39	40	40	37	37	39	37	38



تمرین

1- د ریاضي په مضمون کې درخانۍ خپلې میاشتنۍ نمرې د منکسرې کرښې ګراف په ډول په لاندې شکل کې ښودلې دي.



• درخانۍ په کومه میاشت کې تر ټولو ډېرې نمرې وړې دي؟
• درخانۍ په کومه میاشت کې تر ټولو لږې نمرې وړې دي؟
• په کومه میاشت کې یې نمرې له 35 نه ډېرې دي؟

د غیر متصلې ډېټا اوسط



سړي خپل یو لاس په داسې لوښي کې چې د تودوخې درجه یې د سانتي ګرید 10 درجې د صفر نه لوړه وه او بل لاس یې په داسې ساړه لوښي کې چې د هغې د تودوخې درجه د سانتي ګرید منفي 10 درجې وه، کېښود. له هغه نه پوښتنه و شوه چې حال یې څنګه دی؟ نوموړي وویل په اوسط ډول ښه یم. آیا په دې وضعیت کې د اوسط موندل سم دي؟

فعالیت

د کال په پای کې د آصف نمرې په لاندې ډول دي.

84	92	92	82	97	82	75	82	75	75

- د آصف د نمرو اوسط پیدا کړئ.
- د دې لپاره چې د 75عدد درې ځلې یو له بل سره جمع کړئ، نور څه کولای شئ؟
- د آصف د نمرو د کثرت جدول جوړ کړئ.
- د کثرت د جدول له مخې، د آصف د نمرو د اوسط د پیدا کولو لپاره لاره پیدا کړئ.

پورتنی فعالیت موږ ته دا را ښیي. چې د ډېټا د اوسط د پیدا کولو لپاره د ډېټا د تکرار په صورت کې کولای شو د ډېټا د جمعې پر ځای د ډېټا د کثرت له ضرب څخه ګټه واخلو. که چېرې په کلي حالت کې یوه ډېټا په x او د هغې کثرت په f وښیو د دوی د ضرب حاصل به د $f \cdot X$ سره مساوي وي.
که لومړۍ ډېټا او د هغې کثرت په x_1 او f_1، او دویمه ډېټا او د هغې کثرت په x_2 او f_2 او . . . او اخري ډېټا په x_n او کثرت یې په f_n سره وښیو، ددې ډېټا اوسط مساوي دی:

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n}{n}$$

مثال: د یوه شرکت د کارکوونکو د عاید اندازه په لاندې جدول کې ښودل شوې ده.

دنده	د افغانیو په حساب میاشتنی عاید
رییس	50000
دوه مرستیالان	40000
منشي	20000
دري متخصصان	30000
پنځه مامورین	25000
دوه خانه سامان	10000

د شرکت مدیر وایي د شرکت د کارکوونکو د عاید اوسط له 30000 افغانیو نه زیات دی. آیا دا رقم به د شرکت د ټولو کارکوونکو لپاره سم وي؟ آیا د مدیر دا خبره به سمه وي؟ د کثرت د جدول په کارولو سره د کارکوونکو د عاید اوسط پیدا کړئ.

د کارکوونکو شمیر f		د هریو عاید x	f·x
رییس	1	50000	1 × 50000 = 50000
مرستیال	2	40000	2 × 40000 = 80000
منشي	1	20000	1 × 20000 = 20000
متخصصین	3	30000	3 × 30000 = 90000
مامورین	5	25000	5 × 25000 = 1250000
خانه سامان	2	10000	2 × 10000 = 20000

شمیر $n = 1+2+1+3+5+2 = 14$

$$\overline{x} = \frac{50000+80000+20000+90000+125000+20000}{14} = \frac{385000}{14} = 27500$$

څرنګه چې له محاسبې څخه ولیدل شول د عاید اوسط له 30000څخه لږ دی، نو ویلای شو چې د مدیر ادعا سمه نه ده.

تمرین

احمد هره شنبه او یکشنبه د کتاب 12 مخه او هره سه شنبه، چهارشنبه او پنجشنبه 10 مخه او د جمعې په ورځ د کتاب 16 مخه لولي. د کثرت د جدول په جوړېدو سره د کتاب د هرې ورځې د لوستل شوو مخونو اوسط پیدا کړئ.

د جدول په مرسته د متصلې ډیټا اوسط



د سوداګرۍ وزارت اعلان وکړو چې په تېرکال کې بهر ته د ممیزو د لېږدولو اندازه لس زره ټنه وه یعنې څه؟

فعالیت

یوه بزګر د خپلو کچالانو په لاس راغلی محصول په بېلابېلو وزنونو په بوریو کې واچاوه. بزګر وویل ددې بوریو وزن په اوسط ډول اووه منه دی.

مګر د ښاروالۍ له خوا دا بورۍ بیا وزن شوې چې نتیجه یې په لاندې جدول کې راغلې ده.

آیا د بزګر وینا سمه ده؟

د هرې بورۍ وزن	د بوریو شمېر f
6 – 6.5	11
6.5 – 7	14
7 – 7.5	12
7.5 – 8	8

- د 7 او 6.5 ترمنځ بوریو د وزن اوسط به څو وي؟
- د 7 منو بورۍ په کوم صنف کې راځي؟
- د هر صنف اوسط پیدا کړئ.
- د مخامخ جدول له مخې ویلای شو چې:

د بوریو وزن	د بوریو شمېر f
6.25	11
6.75	14
7.25	12
7.75	8

• ددې بوریو اوسط څو دی؟
• آیا د بزګر وینا سمه ده؟

مثال: د کرنې یوه متخصص د چنار د 35 ونو لوړ والی اندازه کړ نوموړی متخصص غواړي چې د دغو ونو د لوړالي اوسط پیدا کړي.

لوړوالي	د ونو شمېرf	اوسطx	f·x
8 – 8.5	4	8.25	$4 \times 8.25 = 33$
8.5 – 9	5	8.75	$5 \times 8.75 = 43.75$
9 – 9.5	8	9.25	$8 \times 9.25 = 74$
9.5 – 10	7	9.75	$7 \times 9.75 = 68.25$
10 – 10.5	6	10.25	$6 \times 10.25 = 61.5$
10 .5– 11	5	10.75	$5 \times 10.75 = 53.75$

$$\overline{x} = \frac{33 + 43.75 + 74 + 68.25 + 61.5 + 53.75}{35} = \frac{334.25}{35} = 9.55$$

تمرین

د یوه ښوونځي د 20 تنو زده کونکو د ونې (قد) د اندازې په هکله معلومات په لاندې ډول راکړل شوي دي.

قد	158 – 162	162 – 166	170 – 174	166 – 170	174 – 178
کثرتf	2	6	4	5	3

د راکړل شوي ډیټا اوسط پیدا کړئ.

د لسم فصل مهم ټکي

• کله چې ډېټا ډېره وي هغه صنف بندي کوو او بیایې د کثرت له جدول څخه ګټه اخلو. په دې حالت کې د هر صنف کثرت دا راښیي چې په هر صنف کې څو ډېټاوې شاملې دي.

• د صنف تر ټولو لږې اندازې ته ټیټ سرحد او تر ټولو ډېرې اندازې ته یې لوړ سرحد وایي.

• د هر صنف د یو شان ښودلو لپاره له هغه عدد څخه ګټه اخلو چې د نوموړي صنف اوسط وښیي.

• د کثرت په جدول کې د هرې ډېټا تکرار ته د هغې ډېټا مطلق کثرت وایي.

• د ډېټا په صنف بندی کې د هغو ډېټاوو شمېر، چې په یوه صنف کې شامله وي، د هغه صنف د کثرت په توګه په پام کې نیول کېږي.

• د صنفونو مرکز د هغو غړو په شمېر تکرارېږي چې په هغه صنف کې شامل وي، یعنې د صنفونو د کثرت مرکز د هغو غړو له شمېر سره مساوي دی چې په هغه صنف کې شامل وي او دې کثرت ته مطلق کثرت وایو.

• د یوه صنف او د هغه څخه د مخه صنفونو د کثرت مجموعي ته د دغه صنف تجمعي کثرت ویل کېږي او د وروستی صنف تجمعي کثرت مساوي دې د ډېټا د ټول شمېر سره.

• د هر صنف د کثرت نسبت د ټولو ډېټاوو پر شمېر ته نسبي کثرت وایي. که چېرې f د یوه صنف مطلق کثرت او n د ټولې ډېټا شمېر وي. د $\frac{f}{n}$ کسر ته د هغه صنف نسبي کثرت وایي.

• که چېرې نسبي کثرت په 100 کې ضرب کړو د نسبي کثرت فیصدي په لاس راځي.

• د میله یي ګراف څخه د کیفي او مجزا ډېټاوو د ګراف د رسمولو لپاره، ګټه اخیستل کېږي د میله یي ګراف په رسمولو کې د میلو په ترتیب سره را تلل اهمیت نه لري کوم شی چې په دې ګراف کې اهمیت لري هغه د ډېټا کثرت دی.

د میله یي ګراف په رسمولو کې درې لاندې موضوع ګانې په پام کې ونیسئ.

عنوان: موضوع دې په لنډ ډول د ګراف سرته او یا لاندې ولیکل شي.

د محورونو مشخصه: محورونه هر یو مشخصه لري. دغه مشخصه د هغه متحول څرګندونه کوي چې هغه محور یې ښیي.

مقیاس: د هر محور مقیاس باید څرګند او مشخص وي یعنې د ډېټا لپاره دې واحد وټاکل شي او دغه واحد دې د ګراف په څنډه کې ذکر شي.

که چېرې ډېټا د مختصاتو په یوې مستوي کې په ټکو وښودل شي او بیا دغه ټکي د مستقیمو کرښو، په مرسته یو تر بله ونښلول شي. دغه په لاس راغلی ګراف د منکسرې کرښې ګراف په نامه یادېږي.

• د ډېټا د اوسط د پیداکولو لپاره د ډېټا د تکرار په صورت کې د ډېټا د جمعې پر ځای کولای شو چې

په ډېټا کې د کثرت د ضرب څخه په دې ډول ګټه واخلو.

•په نښتو یا متصلو ډېټاوو کې، د صنفونو مرکز د هغو په کثرت کې ضرب او جمع کوو او وروسته له هغې یې د کثرتونو پر مجموعې (چې د ډېټا شمېر ده) ویشو.

$$\text{د کثرت د جدول اوسط} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_nx_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n}$$

عمومي پوښتنې

1- یو ښوونځی دولس ټولګي لري او هر ټولګی یې په دوه (الف) او (ب) ټولګیو وېشل شوې دی د دغه ښوونځي د زده کوونکو شمېر په لاندې ډول دی.

د (الف) جدول

30	35	38
31	32	41
36	35	44
45	37	38

د (ب) جدول

40	45	42	37
48	49	32	35
46	35	46	32

- پورتنی ډیټا په خلورو (34-30 ، 39-35 ، 44-40 ، 49-45) صنفونو کې تنظیم او د هر صنف کثرت ولیکئ:
- د هر یوه صنف پراخوالی او اوسط پیدا کړئ.
- د هر یوه صنف نسبي کثرت او د نسبي کثرت فیصدي پیدا کړئ.
- د هر یوه صنف تجمعي کثرت پیدا کړئ.
- د ټولو صنفونو د نسبي کثرت مجموعه له څه شي سره مساوي دی؟

2- د یوې مغازې خاوند په یوه اونۍ کې د بسکوټو کارتنونه د لاندې جدول له مخې پلورلي دي:

شنبه	یک شنبه	دو شنبه	سه شنبه	چهار شنبه	پنج شنبه	جمعه
8	11	15	9	13	6	4

- د پورتنۍ ډیټا میله یي ګراف رسم کړئ.

3- د مریم د اووم ټولګي د کلنۍ ازموینې نمرې په لاندې جدول کې راکړل شوې دي:

بدني روزنه	ریاضي	ساینس	عربي	انګلیسي	اسلامي تعلیمات	دري	پښتو	هنرونه	اجتماعي علوم
76	92	82	75	85	90	95	80	88	84

- د مریم نمرې د منکسرې کرښې ګراف په ډول وښیئ.
- تر ټولو ډېرې او تر ټولو لږې نمرې یې څرګندې کړئ.

4- د یوه ښوونځي د مدیر، سرښوونکي، ښوونکو، مامورینو، تحویلدارانو او ملازمینو عاید په لاندې جدول کې ښودل شوی دی:

دنده f	د افغانيو په حساب مياشتنى عايدx
د ښونځي مدير	10000
سرښوونکی	8000
4 تنه مامور	4000
25 تنه ښووونکي	5000
2 تنه تحويلدار	3500
5 تنه ملازم	3000

• د دغه کارکوونکو ټوله شمېره پيدا کړئ.
• د هرې ډيټا او د هغې د کثرت د ضرب حاصل وشمېرئ
• د دغه کار کوونکو د عايد اوسط پيدا کړئ.

5- د کرنې يو متخصص د 500 بوټو لوړوالى تر څېړنې لاندې ونيو. له راکړ شوو معلوماتو څخه يې د اټکل په توګه لاندې 30 بوټي وټاکل:

40	50	51	47	34	35	45	45
60	65	50	67	54	55	43	40
58	57	54	51	38	39	47	43
62	65	64	60	30	35		

• راکړل شوی معلومات ترتيب کړئ.
• دغه ډيټا د يوه جدول په ترڅ کې په څلورو 40-30 ، 50-40 ، 60-50 ، 70-60 صنفونو وويشئ.
• د هر صنف کثرت پيدا کړئ.
• د هر صنف اوسط پيدا کړئ.
• د هر صنف د کثرت او د کثرت د اوسط د ضرب حاصل پيدا کړئ.
• د ډيټا اوسط پيدا کړئ.

6- په يوه ټولګي کې د زده کوونکو شمېر 25 تنه دی. دغه زده کوونکي د بادغيس، فارياب، ارزګان، زابل او غور ولايتونو دي، که چېرې د بادغيس ولايت په 1، فارياب ولايت په 2 ، ارزګان ولايت په 3، زابل ولايت په 4 او غور ولايت د 5 په عدد وښيو. دغه لاندې معلومات (ډيټا) د زده کوونکو د زيږېدنې د ځای پر اساس لاسته راغلي دي.
د راکړل شوو معلوماتو (ډيټاوو) د کثرت جدول بشپړ کړئ.

5, 5, 3, 1, 5, 4, 3, 5, 1, 2, 1, 3, 5, 2
1, 5, 1, 2, 4, 1, 2, 1, 3, 2, 1

صنف	کثرت f	نسبي کثرت	ډله ييز کثرت
بادغيس (1)			
فارياب (2)			
ارزګان (3)			
زابل (4)			
غور (5)			

ددې راکړل شوو معلوماتو (ډيټاوو) ميله يي ګراف رسم کړئ.

یوولسم فصل
احتمال



نسبي کثرت او احتمال



د رمل د 6 شمېرې د راوتلو د چانس،
وړاندوینه یا پیش بیني وکړئ.
د رمل د 6 شمېرې د راتلو دشمېر نسبت
په 30 ځلي اچولو کې حساب کړئ.
دا عددونه څه شی موږ ته راښیي؟

فعالیت

د ریاضي په ازموینه کې 35 تنو ګډون کړی وو.
له ازموینې څخه وروسته څرګنده شوه چې 7 تنو د 90 (عالي) نمرو څخه لوړې، 15 تنو د 60 او 90 ترمنځ (ډېر ښه) نمرې 8 تنو د 50 او 60 ترمنځ (ښه) او 5 تنو د 50 نه ښکته (ناکام) نمرې اخیستي دي.

• د کثرت جدول یې جوړ کړئ او د زده کوونکو د درجو نسبي کثرت د عالي، ډېر ښه، ښه او ناکام لپاره محاسبه کړئ.
• په ټولګي کې د پاتې شوي یا ناکامو زده کوونکو شمېر په سلو کې څو دی؟
• که په ټولګي کې یو تن په پټې وټاکل شي، د دې احتمال، چې ټاکل شوی زده کوونکی په لاندې ډله کې وي، پیدا کړئ:
– عالي وي.
– ښه وي.
– پاتې یا ناکام وي.
• د نوموړې هر ټاکلې حالت د احتمال پایلې د هغه حالت له نسبي کثرت سره پرتله کړئ.

له نوموړي فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راځي:

• احتمال، د پېښې له پېښېدو نه د مخه وړاندوینه ده.مګر نسبي کثرت د یوه ازمایښت له پایلې نه وروسته د لاسته راوړل شوو ارقامو په اساس حسابیږي.
• د یوې ناڅاپي پېښې لپاره د تجربي احتمال د پېښې د نسبي کثرت سره مساوي دی.
• څرنګه چې د ټولو حالتونو د نسبي کثرت مجموعه له 1 سره مساوي ده. له دې امله د احتمال د ټولو حالتونو مجموعه هم له یوه (1) سره مساوي ده.

مثال: تیر کال د لیندۍ په میاشت کې 10 ورځې وریځ او اورښت وو.

a) د اورښت او د وریځو ورځو نسبي کثرت دلیندۍ په میاشت کې پیدا کړئ.

b) ستاسې وړاندوینه به د راتلونکی لیندۍ میاشتې په هکله څرنګه وي؟

c) آیا دا وړاندوینه قطعي ده چې هر کال به د لیندۍ په میاشت کې داسې وي؟

حل:

a) څرنګه چې د لیندۍ د میاشتې له 30 ورځو څخه 10 ورځې وریځ او یا اورښت دی. نو له دې کبله د اورښت او یا وریځو ورځو نسبي کثرت د $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}\approx 0.33=33\%$ سره برابر دی.

b) د راتلونکې لیندۍ میاشتې لپاره واړندوینه به د تیرکال د نسبي کثرت له مخې هم 33٪ ده.

c) دا وړاندوینه قطعي نه ده دا امکان شته چې د راتلونکي لیندۍ په میاشت کې د وریځ او اورښت ورځې له 10 څخه ډیرې او یا لږې وي.

تمرین

1- د E_1: یوه ناخاپي پېښه (د یوه ماشوم زیږیدل): په دې پېښه کې نسبي کثرت یعني $h(E_1)=0.51$ او احتمال یعني $P(E_1)=0.51$ دی. څرنګه کولای شئ چې د نسبي کثرت او احتمال ترمنځ توپیر څرګند کړئ؟

2- هرکال د زده کوونکو د اوړي رخصتۍ د زمري د میاشتې لومړۍ 10 ورځې وي. تیر کال د زیاتې ګرمۍ له امله په رخصتۍ 10 ورځې نورې هم زیاتې شوې،غواړو:

د تیرکال د زمري میاشت د اوړي د رخصتیو، نسبي کثرت او د هغې پرتله کول د راتلونکی کال د اوړی له رخصتیو سره پیدا کړو.

په نمونه يي فضا کې برابر او نا برابر چانس



له هرې کڅوړې څخه يو پنډوس اخلو.
له کومې کڅوړې څخه پنډوس واخلو
تر څو دشنه پنډوس د راوتلو چانس ډېر
وي؟

فعاليت

دوه تنه زده کوونکي غواړي چې د رمل په يوه لوبه کې له 1څخه تر 6 پورې شمېرې وټاکي؟

- آيا له 1 څخه تر 6 شمېرو پورې د راوتلو چانس برابر دی؟
- که چېرې د رمل د دانې په دوو خواو کې د 6 شمېره وي؟ په دې صورت کې د ټاکلو چانس په لاندې کوم حالت کې په خپله ګټه ګڼئ؟

– که ټاکلې شمېره 6 وي.
– که د مخامخ لورې لوبغاړې ټاکلې شمېره (1) وي.
– آيا د (1) او (6) شمېرو احتمال سره برابر دی؟

له نوموړې فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راوړو.

تر اوسه له داسې پېښو سره مخامخ وو چې د غړو احتمال يې په يوه نمونه فضا کې يو شان او د هغې په اساس احتمال تعريف شوی دی.
عموما احتمال د P په توري ښودل کيږي او P(A) د A د ناڅاپي پېښې احتمال ښيي.
هرکله چې يوه نمونه فضا n غړي ولري، په دې صورت کې د هرې لومړنۍ E پېښې احتمال مساوي په $P(E)=\frac{1}{n}$ سره دی.

لومړی مثال: د يوې داسې پېسې يا سکې اچول په پام کې نيسو چې دواړه مخونه يې شېر وي.
غوښتنه داده چې ددې سکې احتمال په لاندې حالتونو کې پيدا کړئ.

a) پېسه شير راشي.
b) پېسه خط راشي.

c) آیا په نوموړي مثال کې د شېر او خط د اتفاقي پېښو احتمال د یو بل سره برابر دي؟

حل: پوهېږو چې د سکې دواړه مخونه شېر دي، نو نمونه فضا عبارت له $S = \{شیر\}$ ده:

$$(a):\ P\,(شیر) = \frac{1}{1} = 1$$

$$(b):\ P\,(خط) = \frac{0}{1} = 0$$

دواړه خواوې یعني شېر او خط برابر چانس نه لري، نو ځکه چې: $(c):\quad 0 \neq 1$

دویم مثال: د یوه نورمال رمل اچول په پام کې نیسو. پوهېږو چې د نمونې فضا $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ده نو له دې کبله:

$$P(E) = P(\{6\}) = P(\{5\}) = P(\{4\}) = P(\{3\}) = P(\{2\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{6} \approx 0.17 = 17\%$$

تمرین

1- د یوې کڅوړې څخه چې په هغې کې (3) سره توپونه، (4) دانې اسماني او یو دانه زېړ توپ پروت دی په اتفاقي ډول یو دانه توپ ترې اخلو د لاندې پېښو احتمال پیداکړئ:

a) راوتلی توپ سور وي.

b) راوتلی توپ زېړ وي.

c) راوتلی توپ اسماني وي.

d) که چېرې سره توپونه د زېړو توپونو دوه برابره وي، ایا د سرو او زېړو توپونو د راوتلو احتمال یو له بل سره برابر دی؟

2- د یوه ټولګي د زده کوونکو د نومونو لومړي توري را ټول شوي او په مخامخ جدول کې لیکل شوي دي.

a) د م، ع، ف او ک د تورو په اساس د زده کوونکو د ګروپ نسبي کثرت پیداکړئ.

b) که چېرې له زده کوونکو څخه یو تن د استازي په توګه د پڅي له مخې وټاکل شي، نو د لاندې پېښو احتمال پیداکړئ.

- د ټاکل شوي استازي نوم د (م) په توري پیل شوی وي.
- د ټاکل شوي استازي نوم د (ک) په توري پیل شوی وي.

مطلق کثرت	د زده کوونکو د نومونو لومړي توري
9	م
8	ع
5	ف
3	ک
25	د زده کوونکو ټوله شمېره

د يوې نمونه يي فضا ناڅاپي پېښه



اسمان وريځ دی!
څه به پېښ شي؟

فعاليت

د ښار له ګڼې ګوڼې څخه په ډکې برخې کې د احمد د جيب بټوه د سهار د 10 او 12 بجو ترمنځ غلا شوې ده. پوليسو ته د خبرتيا نه وروسته لومړنيو کتنو څرګنده کړه چې په همدغه وخت او ځای کې درې تنه ګڼکپان د x ، y او z په نامه، چې د پوليسو سره جنايي سابقه هم لري ليدل شوې دي. ددې لپاره چې د غلو د پېژندګلوی په هکله له پوليسو سره مرسته وشي، لاندې فعاليت سرته ورسوئ:
ښايي چې دا بټوه يوه او يا څو شکمنو غلو په ګډه غلا کړې وي. د پېښې په څېړنه کې کوم ترکيب بايد په پام کې ونيول شي؟

– که چېرې د مشکوکو تورنو سيټ په $S = \{x , y , z\}$ وښودل شي نو د شکمنو سرو کوم فرعي سټ او يا لست کولای شو جوړ کړو .

– يا ددې احتمال موجود دی چې شکمن نيول شوي سړي بې ګناه وي؟ په دې صورت کې په لاس راغلی سيټ، د رياضي په ژبه په څه ډول سيټ وښيو؟

له نوموړي فعاليت څخه لاندې پايلې په لاس راځي.

- په نوموړي فعاليت کې مووليدل د يوې پېښې په درشل کې دا امکان شته چې هر ممکن حالت پېښ شي، نو ځکه د اتفاقي يا ناڅاپي پېښې په نامه يادېږي.
- د S د نمونه يي فضا هر فرعي سيټ، يوه اتفاقي پېښه ده چې په E ښودل کېږي.
- هرکله که د يوې نمونه يي فضا د غړو شمېر له n سره مساوي وي، د هغې د اتفاقي پېښو ټول شمېر مساوي د 2^n سره دی.

لومړی مثال: د نوموړي فعالیت لپاره د $S = \{x, y, z\}$ د نمونه یي فضا اتفاقي یا ناخاپي پېښې پیدا کړئ.

حل: د نوموړي نمونه یي فضا د اتفاقي پېښو یا په بل عبارت د s د نمونې فضا د فرعي ستونو، فهرست عبارت دی له:

$E_1 = \{x\}$	په پېښه کې یوازې x غل دی.
$E_2 = \{y\}$	په پېښه کې یوازې y غل دی.
$E_3 = \{z\}$	په پېښه کې یوازې z غل دی.
$E_4 = \{x, y\}$	په پېښه کې دواړه x او y غله دي.
$E_5 = \{x, z\}$	په پېښه کې دواړه x او z غله دي.
$E_6 = \{y, z\}$	په پېښه کې دواړه y او z غله دي.
$E_7 = \{x, y, z\}$	په پېښه کې درې واړه x، y او z غله دي.
$E_8 = \{\quad\} = \emptyset$	په پېښه کې y،x او z یو هم غل نه دی.

له نوموړي مثال څخه پایله یعنې د ناخاپي یا اتفاقي پېښو ټول شمېر چې $2^3 = 8$ دی په لاس راځي. چې د یوې 3 عنصره نمونه یي فضا د ناخاپي پېښو د پیداکولو لپاره د طاقت له فورمول څخه کار اخیستل شوی دی.

تمرین

1- د یوې پیسې یا سکې په اچولو د ناخاپي پېښو فهرست جوړ کړئ.

2- د C, B, A او D څلور ګوندونه چې په پارلماني ټاکنو کې یې ونډه اخستې ده، غواړي چې د بریالیتوب لپاره یو ممکن اتحاد جوړ کړي:

- د ګوندونو د یووالي ټول ممکنه حالتونه یا په ځانګړې توګه برخه اخیستنه فهرست کړئ؟
- د هر ګوند ځانته ونډه او یا ناشونې یعنې $(\emptyset)$ سبټ یې ستاسې له نظره د اتحاد په اړوند پېښې څرنګه د توضیح وړ دي؟

3- په یوه مثال کې $S = \{A, B, C, D\}$ د نمونې فضا لپاره د یوې ناممکنې یاناشونې $(\emptyset)$ ناخاپي پېښې او حتمي یا ډاډمنې پېښې S توضیح کړئ؟

د احتمال قاعدې



- آیا د کرېکټ په ډګر کې چې هر څه د لوبغاړي زړه غواړي، له توپ سره يې کولای شي؟
- آیا قاعدې موجودې دي او که نه؟

فعالیت

د کرېکټ د لوبې په شان د احتمال د علم د تیوري پرمخ وړلو لپاره د پوهانو له خوا د تجربي مسایلو له مخې قاعدې وضع شوې دي هڅه وکړئ چې هغه پیدا کړئ.

- آیا ویلای شئ چې د یوې ناڅاپي پېښې احتمال مساوي په هر مثبت عدد سره دی؟
- ولې د یوه عدد احتمال له یو څخه کوچنی دی؟ څرګنده یې کړئ.
- آیا کیدای شي د یوې ناڅاپي پېښې احتمال مساوي په یو منفي عدد وي؟
- آیا د یوې نمونه یي فضا ددوه لومړنیو پېښو احتمال د لومړنیو پېښو د احتمالونو له مجموعې سره مساوي دي او که نه؟
- آیا د ناشونو یا ناممکنو پېښو احتمال د ریاضي په ژبه لیکلای شئ.

له پورتنیو معلوماتو څخه لاندې پایله په لاس راوړو.

1- د E د اتفاقي پېښې احتمال تل د 0 او 1 ترمنځ دی. یعنې: $0 \le P(E) \le 1$

2- که چېرې S د یوه ازماېښت نمونه یي فضا وي، $P(S) = 1$
د S ناڅاپي پېښه د حتمي (ډاډمنې) پېښې په نامه هم یادېږي.

3- دناشونې یا ناممکنې پېښې لپاره لرو: $P(\emptyset) = 0$ یوه ناشونې اتفاقي حادثه یا ناڅاپي پېښه ده

مثال: د دوه سکو د اچولو د نمونې فضا یعنې $S = \{TT, TH, HT, HH\}$ په پام کې نیسو.
(خط $= T$، شیر $= H$) د لاندې پېښو احتمال مطلوب دی:

a) دواړه سکې شېر وي.

b) یوه سکه شېر وي.

c) دواړه سکې یو شان وي.

d) دواړه سکې یو شان نه وي.

e) د سکو یوه هم خط نه وي.

حل : لرو چې:

a) د دواړو سکو لپاره چې شېر وي. ناخاپي پېښه یې عبارت ده، له: $E_1 = \{HH\}$ له دې کېله:

$$P(E_1) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

b) یوه سکه شېر وي $E_2 = \{TH, HT\}$، له دې کېله:

$$P(E_2) = \frac{2}{4} = 0.5 = 50\%$$

c) د دواړو یو شان سکو لپاره ناخاپي پېښه عبارت ده، له: $E_3 = \{TT, HH\}$ نو لیکلی شو:

$$P(E_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

d) د دواړو سکو لپاره چې یو شان نه وي ناخاپي پېښه عبارت ده، له: $E_4 = \{TH, HT\}$ له دې کېله:

$$P(E_4) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

e) د سکو چې یوه یې هم خط نه وي، ناخاپي پېښه عبارت ده له: $E_5 = \{HH\}$ له دې کېله:

$$P(E_5) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

تمرین

د لاندې پوښتنو سم ځوابونه په تشو ځایونو کې د ✓ په علامه په نښه کړئ.

1- هر کله که S د یو ناخاپي ازمایښت نمونه یې فضا او E یوه ناخاپي پېښه وي په دې صورت کې د E احتمال مساوي دی په:

☐ a) $P(E) = \frac{E}{S}$ ☐ b) $P(E) = \frac{\text{د E عناصرو شمېر}}{\text{د S د عناصرو}}$

2- که A یوه ناخاپي پېښه وي‌نوبیا:

☐ a) $P(A) \geq 1$ ☐ b) $0 \leq P(A) \leq 1$

3- که چېرې S یوه نمونه یې فضا وي لاندې کوم جز سم دی؟

☐ a) $P(S) = 0$ ☐ b) $P(S) = 1$

4- د یوې ناشونې یا ناممکنه پېښې احتمال برابر دی په:

☐ a) $P(\varnothing) = 0$ ☐ b) $P(\varnothing) = 1$

ونه ييز (شجريي) دياګرام

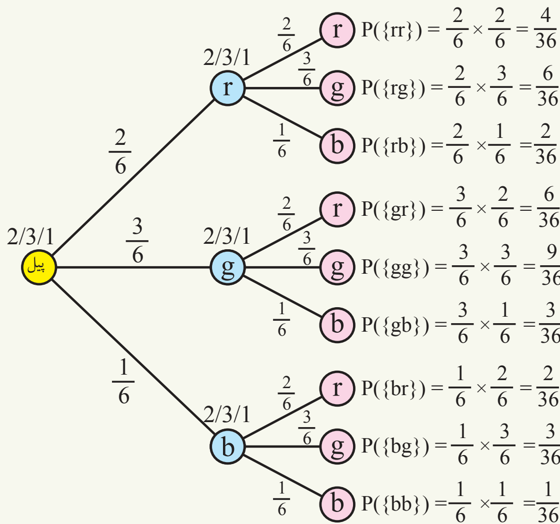


خرنګه کولای شو چې د A ټکې ته ورسيږو.

فعاليت

- د پلار له نيکه څخه را په دې خوا د خپلې کورنۍ د نسب د شجرې ګراف تر خپل ځانه پورې رسم کړئ.
- له يوه سيند څخه يو کانال بېلېږي، کانال د O له ټکي څخه تير او په درې وبالو کې، چې يو له بل سره د 30 درجو زاويه جوړه وي بېلېږي، درې واړه ويالې بيا د A،B،C له ټکو نه تيرېږي.
له پاس درې ټکو نه په ترتيب سره له هر ټکي څخه، درې سيموته لکه $(3,2,1)$، $(6,5,4)$، $(9,8,7)$ ته رسېږي. د نومورې پلان ګراف رسم کړئ.
- هر کله که يوه سکه درې ځله واچوو، پوهيږو چې د هر ممکن حالت شير يا خط په لومړي ځل اچولو سره برابر دي او په دويم ځل اچولو د 2 ممکنو حالتونو په شمېر چې موجود دي هر يوه ته دوه حالته شير يا خط پيښېدلای شي، له هغې وروسته په درېم ځل اچولو هره شونې يا ممکنه پايله، لکه: تير حالتونه، د شير او خط دوه حالتونه شته په لاس راځي. موضوع د يوه ګراف په مرسته رسم کړئ؟
- د لومړنيو پېښو د احتمالاتو قيمت د هغه څانګو د احتمالونو د ضرب له حاصل سره پرتله کړئ چې په دغه مسير يا لارې کې پراته دي.

- کولای شو هر ناڅاپي ازمايښت د يوه دياګرام په مرسته، چې ازمايښت له پيل څخه پيل کېږي، د څانګو د ممکنه پايلو په شمېر رسم کړو. د دويم ځل د سرته رسولو لپاره تجربه يا ازمايښت يو ځل بيا د لومړي پړاو په شان، د څانګې په هره ممکنه پايله رسمېږي. نومورې ګراف چې د ونې په شان ښاخ او څانګې کوي د ونه ييز دياګرام په نامه يادېږي.
- د احتمالونو د جمع حاصل د څانګو د نشرېدو په هر ټکي کې له (1) سره مساوي دي.
- د ټولو لومړنيو پېښو د احتمالاتو د جمع حاصل هم مساوي له (1) سره دي.



مثال: په یوه کڅوړه کې 6 توپونه پراته دي. دوه توپونه په سره رنګ (r) دري توپونه په شنه رنګ (g) او یو توپ په تور رنګ (b)، ددې کڅوړې له منځ نه دوه توپونه یو په بل پسې راخستل کېږي او وروسته له کتلو بیا په کڅوړې کې اچول کیږي. د ازمایښت د ټولو لومړنیو پېښو احتمال وټاکئ. دا په پام کې ونیسئ چې په هر پړاو کې د وېشونکي ټکي پر مخ عددونه هر یو د رنګ په پام د توپونو د شمېر ښودونکي او له هرې څانګې پر مخ عددونه، د هرې ناځایي پېښې احتمال په هر پړاو کې ښيي. د پېښو په اړوند په لاس راغلي احتمالونه په لاندې جدول کې لیکو:

w	rr	rg	rb	gr	gg	gb	br	bg	bb
P({w})	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

ددې لپاره چې د پېښو د احتمالونو په پرتله کولو کې یو څه اسانتیاولرو، نو ټول احتمالونه په جدول کې له لنډوني یا اختصار پرته په واحد مخرج لیکل شوي دي.

تمرین

1- که چېرې یوه پیسه یا سکه درې ځلې په پرله پسې ډول واچول شي د لاندې ممکنه پېښو پایلې او احتمال د ونې ییز دیاګرام په مرسته محاسبه کړئ.

دا احتمال چې:

a) پیسه یو ځلې یې خط راشي.

b) پیسه دوه ځلې یې خط راشي.

c) پیسه لږ تر لږه یو ځلې خط راشي.

d) پیسه یو شیر وي.

e)پیسه په اکثر ډول یو ځل شیر راشي.

د مسیر لومړی قاعده (د ضرب حاصل)



ددې بندو لارو څخه نانځکه په کومه لار وتلای شي؟

فعالیت

د پلار له نیکه څخه خپله شجره پیل او د خپل نیکه د اړوندې کورنۍ تر کوچني غړي پورې یې د شجرې ګراف رسم کړئ.

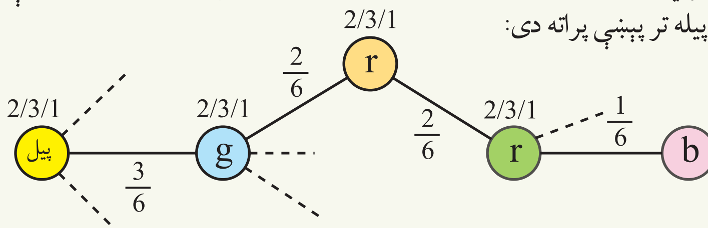
- په ګراف کې له نیکه سره د خپلو اړیکو لاره یا مسیر په سره رنګ څرګند کړئ.
- د خپل تره د زوی د اړیکو لاره یا مسیر له خپل نیکه سره څرګند کړئ.
- د پلار د تره د لمسي د اړیکو لاره یا مسیر د خپل پلار د نیکه سره پیدا کړئ.

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

- هر مسیر یا لاره موږ یوې ځانګړې پایلې ته رسوي.
- د یو ازمایښت په پای ته رسولو کې د هرې شجرې د ګراف مسیر په یوې لومړنۍ ناڅاپي پېښې پای ته رسېږي.
- هرې لومړنۍ ناڅاپي پېښې ته رسېدل د بیلو مسیرونو او د ځانګو له بېلابېلو منتشره ټکو څخه تیرېږي.
- د یوې لومړنۍ پېښې احتمال عبارت دی د مسیر له پیل نه ترپېښې پورې د احتمالونو د ضرب له حاصل څخه.

مثال: له یوې کڅوړې څخه چې په هغې کې 2 سرې مرۍ (r) ، او درې شنې مرۍ (g) او یوه تور رنګه مرۍ (b) پرته ده ،د یوې مرۍ راوېستلو لپاره د ونه ییز ډیاګرام په داسې حال په پام کې ونیسئ چې مرۍ له راویستلو او کتلو وروسته بیا کڅوړې ته اچول کېږي او غوښتنه مو د W = {grrb} (شنې، سرې، سرې او تورې) د پېښې احتمال وي.

حل: په دې صورت کې دا ضرور نه ده چې د ونې دیاګرام د شکل په څلور پړاوونوکې ټول په مکمله توګه رسم کړو. بلکې هغه لاره یا مسیر په پام کې نیسو چې مونږ ناڅاپي مطلوبې پېښې ته رسوي او د پېښې احتمال د نوموړي مسیر له پلوه د هغه احتمالونو د ضرب له حاصل څخه عبارت دی چې په همدې مسیر کې له پیله تر پېښې پراته دی:



له دې کبله د مسیر د لومړنۍ قاعدې په مرسته د نوموړې پېښې د احتمال قیمت عبارت دی له:

$$P(\{w\}) = P(\{grrb\}) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{12}{1296} = 0.0092 = 0.92\%$$

$$\Rightarrow P(\{w\}) = 0.0092 = 0.92\%$$

یعنې: د (شنې، سرې، سرې، تورې) مریو د وتلو احتمال 0.92% دی.

تمرین

1- د مسیر د لومړۍ قاعدې په مرسته له کڅوړې څخه د مریو د ناڅاپي راوتلو احتمال، د لاندې ناڅاپي پېښو لپاره پیدا کړئ.

- $w_1 = \{gbbr\}$
- $w_2 = \{rggb\}$
- $w_3 = \{brrg\}$

د فصل مهم ټکي

• **نسبي کثرت او احتمال**: د یوې تجربې نسبي کثرت عبارت دی د مطلق کثرت نسبت، نظر د هغو ټولو پیښو شمېر ته چې په یوه تجربه یا ازماېښت کې یې د پیښدو امکان موجود وي. مګر د احتمال شمېرنه د یوې پېښې له پېښدو نه د مخه حسابیږي. د A پېښې نسبي کثرت په $h(A)$ ښودل کیږي. او $0 \le h(A) \le 1$ په داسې حال کې چې $h_n(\phi) = 0$ او $h_n(S) = 1$ دي.

• **برابر چانس**: هغه پیښې چې دیوې ناڅاپه (تصادفي) تجربې په سرته رسولو کې هېڅ ډول برلاسې د یوې او بلې پېښې تر منځ موجود نه وي د برابر چانس د پېښو په نامه یادېږي.

مثلاً: د رمل د شمېرو راتګ هر یو، برابر چانس یعنې مساوي په $\frac{1}{6}$ سره وي.

• **اتفاقي پیښه**: د یوې نمونه یي فضا هر فرعي سیټ د هماغې تجربې د یوې ناڅاپي پېښې په توګه شمېرل کیږي. تش سټ یوه ناشونې یا ناممکنه ناڅاپي پېښه او S یوه حتمي ناڅاپي پېښه ده.

• **د احتمال قاعدې**: هر کله که E یوه ناڅاپي پېښه د S د نمونې فضا وي

1) $0 \le P(E) \le 1$

2) $P(\phi) = 0$, $P(S) = 1$

• **ونه ییز دیاګرام**: هره ناڅاپه تجربه د پیل له ټکي څخه یې ناڅاپي ممکنه پېښې په بېلو څانګو وېشل کېږي. د هغې د دویمې مرتبې سرته رسول، لکه د لومړي پړاو په څېر ممکنه پایله یې د پیل د ټکي په څېر یو ځل بیا د ناڅاپي پېښو د څانګو ګراف یې رسمېږي. په همدې ترتیب دغه لاره ادامه مومي. د هرې لومړنۍ پېښې په لاس راوړل شوي احتمال، عبارت دی له هغو څانګو څخه چې په یوه بند کې راټولېږي. په دې ډول دهر ښاخ یا څانګې د احتمالاتو د ضرب له حاصل څخه چې مونږ د پیل له ټکي څخه د مطلوبه مسیر پرمخ په ناڅاپی پېښه پای ته رسوي.

- د څانګو د انتشا رېه هر ټکي کې د احتمالاتو د جمع حاصل له 1 سره مساوي دی.
- د هماغه مسیرونو ټولو لومړنیو پېښو د احتمالاتو د جمع حاصل له 1 یوه سره مساوي دی.

• **د احتمال د مسیر لومړۍ قاعده**:

پر ونه ییز ګراف باندې د هر ټاکلي مسیر په پای کې، د هرې ناڅاپه پېښې احتمال مساوي دی د مطلوبه مسیر په لار د هرې څانګې د احتمالونو د ضرب له حاصل سره.

عمومي پوښتنې

1-که چېرې یوه سکه 200 ځلې واچول شي او د دغو جملې څخه 92 ځله شېر راشي. په دې صورت کې تاسې د لاندې پېښو نسبي کثرت په لاس راوړئ.
- سکه شیر راشي
- سکه خط راشي
- د خط د راتلو او د شېر د راتلو د نسبي کثرت مجموعه څو ده؟ بې له محاسبې څخه ځواب ووایئ.
2- که چېرې په کال کې د اورښتې ورځو د مطلق کثرت ورځو په شمېر 62 ورځې وي. غوښتل کېږي:
- په کال کې د اورښتې یا باراني ورځو نسبي کثرت (که چېرې کال 365 ورځې په پام کې ونیول شي)
- نسبتي کثرت د باران ورځې وي.
- دا احتمال چې باران یوه ورځ وي.
- نسبي کثرت او د یوې اورښتې ورځې لپاره احتمال، توضیح کړئ.
3- د رمل د یوې دانې د اچولو لپاره نمونه فضا جوړه کړئ. هغه اتفاقي پېښې چې د برابر چانس لرونکي وي فهرست کړئ.
4- یوه سکه او یو رمل واچوئ غوښتنه داده چې د تجربې نمونه فضا او ونه ییز دیاگرام یې پیدا کړئ. په داسې احتمال چې سکه شېر او د رمل دانه 6 راوتلې وي.
5- د یوې تیارې کوټې په الماری کې دوه (تور او سپین) کمیسونه پراته دي. ددې دوارو ترمنځ درې ځله کمیس ټاکو (دبیرته اېښودلو په صورت کې) لاندې احتمال پیدا کړئ که:
(E_1) : دویم کمیس تور وي
(E_2) : یوازې دویم کمیس تور وي
(E_3) : لږترلږه یو کمیس تور وي
(E_4) : له یو نه زیات کمیسونه تور وي.
(E_5) : لومړنی او یا اخیرنی کمیس تور وي
(E_6) : لومړنی او اخیرنی کمیس تور وي.
6- په یوې الماری کې د ریاضي 5 کتابونه او د فزیك 6 کتابونه پراته دي. د تصادف په صورت کې د دوی له منځه 6 کتابونه ټاکو. داسې احتمال پیدا کړئ چې دوه کتابونه ریاضي وي.